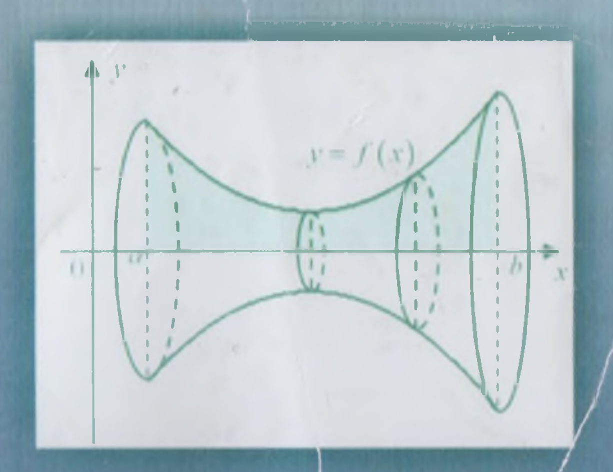
И.П. Рустюмова
С.Т. Рустюмова

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕДИНОМУ НАЦИОНАЛЬНОМУ ТЕСТИРОВАНИЮ (ЕНТ)



Часть 2

ИЗДАНИЕ ПЕРВОЕ

И.П. Рустюмова
С.Т. Рустюмова

Пособие для подготовки к единому национальному тестированию (ЕНТ) по математике

Издание первое

Часть 2

Алматы
2013

ББК 22.1я7
Р88

Рекомендовано Учебно-методическим советом Казахской академии образования им. Ы. Алтынсарина от 20.12.2004

Рецензенты:

КАН Анатолий Андреевич – заслуженный учитель Казахстана

КАСАТКИН Владимир Борисович – учитель высшей категории

Корректор:

СУББОТИНА Людмила Петровна

Рустюмова И.П., Рустюмова С.Т.

Р88 Пособие для подготовки к единому национальному тестированию (ЕНТ) по математике. В 2 ч. Учебно-методическое пособие. Издание первое. – Алматы, 2013. - 624 с.

ISBN 9965-07-369-4

В данной книге авторы обобщили свой многолетний опыт подготовки учащихся к сдаче ЕНТ по математике. Пособие включает все темы школьного курса математики и соответствует современным образовательным стандартам и требованиям ЕНТ. Наличие теории и большого количества подробно разобранных задач дает возможность читателю самостоятельно ликвидировать пробелы, повторить теорию и научиться решать задачи.

Пособие может быть полезным для всех желающих в кратчайшие сроки систематизировать свои знания по основным вопросам математики.

$Р\frac{1602000000}{407(05)-05}$

ББК 22.1я7

ISBN 9965-07-369-4

ГЛАВА VI ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§1. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Известно, что школьники испытывают немалые трудности, изучая тригонометрию. Причин этому несколько. Укажем две из них: большое количество формул, которые необходимо помнить, и отсутствие стандартных приемов преобразований тригонометрических выражений.

Формирование навыков тождественных преобразований тригонометрических выражений требует специальной тренировки, которая осуществляется с помощью достаточно большого числа упражнений.

Выполнение преобразований тригонометрических выражений рекомендуется начинать с анализа структуры данного выражения и составления плана действий. Иногда могут быть полезны следующие рекомендации:

1. Если выражение содержит разные тригонометрические функции одного аргумента, то попробуйте все функции выразить через одну или две функции. При этом тангенс и котангенс угла чаще всего выражают через синус и косинус этого же угла.

2. Если в выражение входят тригонометрические функции от разных аргументов, то попытайтесь свести все функции к одному аргументу.

3. Формулы приведения могут быть полезны для выражения тригонометрической функции через кофункцию.

4. Не забывайте о формулах сокращенного умножения – они могут иногда помочь в преобразовании тригонометрического выражения.

5. Если в выражении нет нужного слагаемого, то его можно прибавить и сразу же вычесть. Иногда полезно какое-то слагаемое представить в виде суммы двух или нескольких слагаемых. Наконец, единицу бывает полезным представить в виде $1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

6. Если в выражении нет нужного множителя, то на него можно умножить и сразу же разделить данное выражение (при условии, что этот множитель отличен от нуля).

7. Попробуйте применить метод введения вспомогательного угла. В простейших случаях он сводится к замене чисел $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\sqrt{3}$; 1 тригонометрическими функциями соответствующих углов.

8. Если в выражение входят степени тригонометрических функций, то можно обратиться к преобразованиям, понижающим степени.

9. Если данное выражение является однородным многочленом n-ой степени относительно $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, то преобразование можно выполнять путем вынесения за скобки $\cos^n\alpha$ или $\sin^n\alpha$.

Характерная особенность преобразований тригонометрических выражений состоит в том, что к одному и тому же результату, как правило, можно прийти разными путями. Поэтому по окончании решения полезно время от времени сопоставлять различные способы преобразования одного и того же выражения.

Надо помнить, что в тех задачах, где речь идет о преобразовании тригонометрического выражения, всегда предполагается, хотя часто и не оговаривается в условии задачи, что преобразование предложенного выражения должно быть проведено в его области определения. То есть только при тех значениях аргументов, для которых тригонометрическое выражение имеет смысл.

Тождественные преобразования тригонометрических выражений опираются на следующие основные формулы.

- Формулы для тригонометрических функций одного и того же аргумента.
- Формулы приведения.
- Формулы двойного аргумента.
- Формулы половинного аргумента.
- Формулы сложения аргументов.
- Формулы преобразования суммы (разности) тригонометрических функций в произведение.
- Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму (разность).

Рассмотрим применение каждой из формул на конкретных примерах.

Применение формул для тригонометрических функций одного и того же аргумента

По значению одной из тригонометрических функций некоторого аргумента можно, используя приведенные ниже формулы, найти значения всех остальных. Применение этих формул значительно сокращает и упрощает процесс тригонометрических преобразований.

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \ n \in \mathbb{Z}\right);$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad (\alpha \neq \pi n, \ n \in \mathbb{Z});$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbb{Z}\right);$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \ n \in \mathbb{Z}\right);$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \quad (\alpha \neq \pi n, \ n \in \mathbb{Z}).$$

В скобках указаны значения аргумента, при которых тождества имеют числовой смысл.

Рассмотрим вычисление значений тригонометрических функций с использованием основных формул и табличных значений.

1.1. Вычислите:

1) $\dfrac{1 + \operatorname{tg}^6 \frac{\pi}{3}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}^4 \frac{\pi}{3}}$ **2)** $2\operatorname{tg}180° + \cos180° - \cos^2 15° - \sin^2 15°$

3) $\left|\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right)\right| + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 1{,}5\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\left|\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|$

4) $\sqrt{(1 - 2\sin 45°)^2} - \sqrt{(1 - 2\cos 30°)^2}$

5) $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2}$

6) $\sqrt{1 - \cos^2 4}$

7) $1 + \sin^4 10° + \cos^2 10° + \sin^2 10° \cdot \cos^2 10°$

Решение:

1) $\dfrac{1+\mathrm{tg}^6\dfrac{\pi}{3}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{tg}^4\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{1+\left(\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{3}\right)^3}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{tg}^4\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{\left(1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{3}\right)\left(1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{tg}^4\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{tg}^4\dfrac{\pi}{3}}=$

$=1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{3}=1+\left(\sqrt{3}\right)^2=4$

2) $2\,\mathrm{tg}180^\circ+\cos180^\circ-\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ=$

$=2\,\mathrm{tg}180^\circ+\cos180^\circ-\left(\cos^2 15^\circ+\sin^2 15^\circ\right)=2\cdot0-1-1=-2$

3) $\left|\sin\left(-\dfrac{1}{4}\pi\right)\right|+\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+1{,}5\,\mathrm{tg}^2\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{1}{2}\left|\mathrm{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=$

$=\sin\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{4}+1{,}5\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1{,}5\cdot\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}=$

$=\sqrt{2}+0{,}5-0{,}5=\sqrt{2}$

4) $\sqrt{(1-2\sin45^\circ)^2}-\sqrt{(1-2\cos30^\circ)^2}=\left|1-2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right|-\left|1-2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=$

$=\left|1-\sqrt{2}\right|-\left|1-\sqrt{3}\right|=-\left(1-\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)=-1+\sqrt{2}+1-\sqrt{3}=\sqrt{2}-\sqrt{3}$

5) $\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 2}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 2}}=\dfrac{1}{|\cos 2|}=$ | Угол 2 радиана принадлежит второй четверти, следовательно, $\cos 2<0$ | $=-\dfrac{1}{\cos 2}$

6) $\sqrt{1-\cos^2 4}=\sqrt{\sin^2 4}=|\sin 4|=$ | Угол 4 радиана принадлежит третьей четверти, следовательно, $\sin 4<0$ | $=-\sin 4$

7) $1+\sin^4 10^\circ+\cos^2 10^\circ+\sin^2 10^\circ\cdot\cos^2 10^\circ=$

$=1+\cos^2 10^\circ+\sin^2 10^\circ\cdot\left(\sin^2 10^\circ+\cos^2 10^\circ\right)=1+\cos^2 10^\circ+\sin^2 10^\circ=1+1=2$

1.2. Вычислите:

1) $2\sin^2\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=1$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

2) $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

3) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$, если $\cos\alpha=-0,4$

4) $\frac{3\cos\alpha+5\sin\alpha}{2\cos\alpha-\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=1$

5) $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$

6) $\frac{\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$

7) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=a$

Решение:

1) Так как $\operatorname{ctg}\alpha=1$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

$$2\sin^2\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha=2\sin^2\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=$$

$$=2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+1=1+1+1=3$$

В следующих заданиях выражают искомую функцию через данную, используя тригонометрические формулы с учетом знака в указанном промежутке, затем подставляют данное значение и производят вычисления.

2) Учитывая, что α - угол II четверти, найдем $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$1\frac{1}{4}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{4}{5}\quad\Rightarrow\quad\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}\quad\Rightarrow\quad\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{4}{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

3) $\cos\alpha=-0,4$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=$$

$=1-(-0,4)^2=0,84$

4) $\operatorname{tg}\alpha=1$

$$\frac{3\cos\alpha+5\sin\alpha}{2\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\frac{3\cos\alpha}{\cos\alpha}+\frac{5\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{3+5\operatorname{tg}\alpha}{2-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{3+5\cdot1}{2-1}=8$$

5) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$

$$\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{12}{7}$$

6) $\operatorname{tg}\alpha=3$

$$\frac{\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{3\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-3}{2\operatorname{tg}^2\alpha+1}=\frac{9-3}{2\cdot9+1}=\frac{6}{19}$$

7) $\sin\alpha+\cos\alpha=a$

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=a^2$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=a^2$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=a^2-1 \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{a^2-1}{2}$

1.3. Упростите:

1) $\frac{1}{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\cdot\sin^2\alpha}$

2) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^2\alpha$

3) $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

4) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

5) $1+\frac{1-\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$

6) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$

Решение:

1) $\dfrac{1}{(\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha)\cdot\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot\sin^2\alpha}=\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\cdot\sin^2\alpha}=$

$=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\mathrm{ctg}\,\alpha$

2) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha\cdot(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha=$

$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

3) $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=$

$=\dfrac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$

4) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}=$

$=\dfrac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=\dfrac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\,\mathrm{ctg}\,\alpha$

5) $1+\dfrac{1-\cos^2\alpha+tg^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=1+\dfrac{\sin^2\alpha+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=1+\dfrac{2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=3$

6) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3+3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=$

$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)+3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=$

$=\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=1$

Применение формул приведения

Формулы приведения и формулы периодичности тригонометрических функций позволяют выразить значение тригонометрической функции угла любой величины через тригонометрические функции острого угла α .

Для того чтобы усвоить все формулы приведения, нет необходимости их запоминать, достаточно уяснить два вопроса: какой знак и какое название будет иметь функция.

1. Какой знак? Перед приведенной функцией ставится знак, который имеет исходная функция, если считать, что α - угол I четверти.

2. Какое название? Для углов $\pi \pm \alpha$ и $2\pi \pm \alpha$ название тригонометрической функции сохраняется. Для углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ и $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ название функции меняется на кофункцию (синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот).

1.4. Вычислите:

1) $\cos\left(-11\frac{1}{3}\pi\right)$

2) $\cos\pi - 2\sin\frac{37\pi}{6}$

3) $\cos 105° - \sin 195° + \sin(-135°)$

4) $\frac{\sin 420° \cdot \sin 30° \cdot \cos 750°}{\sin 570° \cdot \sin 1230° \cdot \cos 660°}$

5) $\operatorname{tg} 10° \cdot \operatorname{tg} 20° \cdot \operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 40° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 80°$

Решение:

1) $\cos\left(-11\frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(11\frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{34}{3}\pi\right) = \cos\left(2\pi \cdot 5 + \frac{4}{3}\pi\right) =$

$= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

2) $\cos\pi - 2\sin\frac{37\pi}{6} = -1 - 2\sin\left(6\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -1 - 2\sin\frac{\pi}{6} = -1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = -2$

3) $\cos 105° - \sin 195° + \sin(-135°) = \cos 105° - \sin 195° - \sin 135° =$

$= \cos(90° + 15°) - \sin(180° + 15°) - \sin(90° + 45°) =$

$= -\sin 15° + \sin 15° - \cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\frac{\sin 420° \cdot \sin 30° \cdot \cos 750°}{\sin 570° \cdot \sin 1230° \cdot \cos 660°} =$

$= \frac{\sin(360° + 60°) \cdot \sin 30° \cdot \cos(2 \cdot 360° + 30°)}{\sin(360° + 210°) \cdot \sin(3 \cdot 360° + 150°) \cdot \cos(360° + 300°)} =$

$= \frac{\sin 60° \cdot \sin 30° \cdot \cos 30°}{\sin 210° \cdot \sin 150° \cdot \cos 300°} =$

$$= \frac{\sin 60° \cdot \sin 30° \cdot \cos 30°}{\sin(180°+30°)\cdot\sin(180°-30°)\cdot\cos(270°+30°)} =$$

$$= \frac{\sin 60° \cdot \sin 30° \cdot \cos 30°}{(-\sin 30°)\cdot\sin 30°\cdot\sin 30°} = -\frac{\sin 60° \cdot \cos 30°}{\sin^2 30°} = -\frac{\cos^2 30°}{\sin^2 30°} =$$

$$= -\operatorname{ctg}^2 30° = -\left(\sqrt{3}\right)^2 = -3$$

5) $\operatorname{tg} 10° \cdot \operatorname{tg} 20° \cdot \operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 40° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 80° =$
$= \operatorname{tg} 10° \cdot \operatorname{tg} 20° \cdot \operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 40° \cdot \operatorname{ctg} 40° \cdot \operatorname{ctg} 30° \cdot \operatorname{ctg} 20° \cdot \operatorname{ctg} 10° = 1$

1.5. Упростите:

1) $\sin(90°-\alpha)-\cos(180°-\alpha)+\operatorname{tg}(180°-\alpha)-\operatorname{ctg}(270°+\alpha)$

2) $\dfrac{\sin(\alpha-\pi)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos(-\alpha)}{\cos(\alpha-2\pi)\cdot\operatorname{tg}(-\alpha-\pi)}$

3) $\sin(180°-\alpha)-\dfrac{\cos^2(180°+\alpha)}{\cos(\alpha-270°)}$

4) $\dfrac{\sin^3(\alpha-270°)\cdot\cos(360°-\alpha)}{\operatorname{tg}^3(\alpha-90°)\cdot\cos^3(\alpha-270°)}$

Решение:

1) $\sin(90°-\alpha)-\cos(180°-\alpha)+\operatorname{tg}(180°-\alpha)-\operatorname{ctg}(270°+\alpha)=$
$=\cos\alpha-(-\cos\alpha)+(-\operatorname{tg}\alpha)-(-\operatorname{tg}\alpha)=\cos\alpha+\cos\alpha-\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha=2\cos\alpha$

2) $$\frac{\sin(\alpha-\pi)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos(-\alpha)}{\cos(\alpha-2\pi)\cdot\operatorname{tg}(-\alpha-\pi)} = \frac{-\sin(\pi-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos\alpha}{\cos(2\pi-\alpha)\cdot(-\operatorname{tg}(\pi+\alpha))} =$$

$$= \frac{-\sin\alpha\cdot(-\operatorname{tg}\alpha)\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot(-\operatorname{tg}\alpha)} = -\sin\alpha$$

3) $$\sin(180°-\alpha)-\frac{\cos^2(180°+\alpha)}{\cos(\alpha-270°)} = \sin(180°-\alpha)-\frac{\cos^2(180°+\alpha)}{\cos(270°-\alpha)} =$$

$$= \sin\alpha - \frac{\cos^2\alpha}{(-\sin\alpha)} = \sin\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}$$

4) $$\frac{\sin^3(\alpha - 270°)\cdot\cos(360° - \alpha)}{\text{tg}^3(\alpha - 90°)\cdot\cos^3(\alpha - 270°)} = \frac{-\sin^3(270° - \alpha)\cdot\cos(360° - \alpha)}{-\text{tg}^3(90° - \alpha)\cdot\cos^3(270° - \alpha)} =$$

$$= \frac{\cos^3\alpha\cdot\cos\alpha}{-\text{ctg}^3\alpha\cdot(-\sin^3\alpha)} = \frac{\cos^4\alpha}{\frac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}\cdot\sin^3\alpha} = \cos\alpha$$

Применение формул сложения аргументов

Любую тригонометрическую функцию суммы или разности двух углов можно выразить через тригонометрические функции этих углов.

$$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \cos\alpha\cdot\sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta \mp \sin\alpha\cdot\sin\beta \\ \text{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\text{tg}\alpha \pm \text{tg}\beta}{1 \mp \text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta}, \quad \left(\alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right) \\ \text{ctg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\text{ctg}\alpha\cdot\text{ctg}\beta \mp 1}{\text{ctg}\beta \pm \text{ctg}\alpha}, \quad (\alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

1.6. Вычислите:

1) $\sin 15°$ **2)** $\cos 105°$ **3)** $\text{tg}\, 75°$

Решение:

1) $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45°\cdot\cos 30° - \cos 45°\cdot\sin 30° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

2) $\cos 105° = \cos(60° + 45°) = \cos 60°\cdot\cos 45° - \sin 60°\cdot\sin 45° =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 - \sqrt{3}\right)$$

3) $\operatorname{tg}75° = \operatorname{tg}(45°+30°) = \dfrac{\operatorname{tg}45° + \operatorname{tg}30°}{1-\operatorname{tg}45°\cdot\operatorname{tg}30°} = \dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{6} =$

$= \dfrac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2+\sqrt{3}$

1.7. Вычислите:

1) $\cos(\alpha+\beta)$, $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$, $\cos\beta = -\dfrac{4}{5}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$

2) $\cos(\alpha-\beta)$, $\sin\alpha = -\dfrac{5}{13}$, $\cos\beta = -\dfrac{4}{5}$ (α, β - углы III четверти)

3) $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = 2$, $\sin\beta = \dfrac{3}{5}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$

Решение:

1) Вычислим $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ с учетом четверти, которой принадлежат углы α и β:

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{9}{25}} = \dfrac{4}{5}$, $\sin\beta = -\sqrt{1-\cos^2\beta} = -\sqrt{1-\dfrac{16}{25}} = -\dfrac{3}{5}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta = \left(-\dfrac{3}{5}\right)\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right) - \dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right) =$

$= \dfrac{12}{25} + \dfrac{12}{25} = \dfrac{24}{25}$

2) Вычислим $\cos\alpha$ и $\sin\beta$ с учетом четверти, которой принадлежат углы α и β:

$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\dfrac{25}{169}} = -\dfrac{12}{13}$,

$\sin\beta = -\sqrt{1-\cos^2\beta} = -\sqrt{1-\dfrac{16}{25}} = -\dfrac{3}{5}$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta = \left(-\dfrac{12}{13}\right)\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right) + \left(-\dfrac{5}{13}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right) =$

$= \dfrac{48}{65} + \dfrac{15}{65} = \dfrac{63}{65}$

3) Вычислим $\operatorname{tg}\beta$:

$$\cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5};\quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{3}{5} \div \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{4}$$

Вычислим $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = 2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} = 2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\operatorname{tg}\alpha - \left(-\frac{3}{4}\right)}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)} = 2$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}\operatorname{tg}\alpha} = 2 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{tg}\alpha + \frac{3}{4} = 2 - \frac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha \quad\Rightarrow\quad 2\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha = 1\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$$

1.8. Упростите:

1) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{30}\cdot\cos\frac{\pi}{15}+\sin\frac{\pi}{30}\cdot\sin\frac{\pi}{15}}{\sin\frac{7\pi}{30}\cdot\cos\frac{4\pi}{15}+\cos\frac{7\pi}{30}\cdot\sin\frac{4\pi}{15}}$

2) $\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)}$

3) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}$

4) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$

Решение:

1) $$\frac{\cos\frac{\pi}{30}\cdot\cos\frac{\pi}{15}+\sin\frac{\pi}{30}\cdot\sin\frac{\pi}{15}}{\sin\frac{7\pi}{30}\cdot\cos\frac{4\pi}{15}+\cos\frac{7\pi}{30}\cdot\sin\frac{4\pi}{15}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{30}-\frac{\pi}{15}\right)}{\sin\left(\frac{7\pi}{30}+\frac{4\pi}{15}\right)} = \frac{\cos\frac{\pi}{30}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{30}$$

2) $$\frac{\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)} =$$

$$= \frac{\sin45^\circ\cdot\cos\alpha+\cos45^\circ\cdot\sin\alpha-\cos45^\circ\cdot\cos\alpha+\sin45^\circ\cdot\sin\alpha}{\sin45^\circ\cdot\cos\alpha+\cos45^\circ\cdot\sin\alpha+\cos45^\circ\cdot\cos\alpha-\sin45^\circ\cdot\sin\alpha} =$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$$

3) $$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

4) $$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+$$

$$+\frac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=1$$

Применение формул двойного аргумента

Следующие формулы выражают тригонометрические функции произвольного угла через тригонометрические функции угла в два раза меньшего:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\quad\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad \alpha\neq\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha},\quad\left(\alpha\neq\frac{\pi m}{2},\ m\in\mathbb{Z}\right)$$

1.9. Вычислите:

1) $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{20}{29}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

2) $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

3) $1+9\sqrt{5}\sin 2\alpha$ если $\cos\alpha=\frac{2}{3}$ и $270°<\alpha<360°$

4) $4+27\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$

5) $\sin\alpha$, если $\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}=1,4$

6) $\cos\dfrac{\pi}{9}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{9}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{9}$

7) $\sin 10°\cdot\sin 50°\cdot\sin 70°$

8) $\dfrac{4\sin 20°\cdot\sin 50°\cdot\sin 70°}{\sin 80°}$

Решение:

1) Учитывая, что α - угол II четверти, получаем:

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{20}{29}\right)^2}=-\frac{21}{29}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot\frac{20}{29}\cdot\left(-\frac{21}{29}\right)=-\frac{840}{841}$$

2) Найдем $\cos\alpha$ из равенства:

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\quad\Rightarrow\quad\cos^2\alpha=\frac{16}{25}$$

Но $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$, поэтому $\cos\alpha=-\sqrt{\dfrac{16}{25}}=-\dfrac{4}{5}$.

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\frac{3}{5}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{24}{25}$$

3) $1+9\sqrt{5}\sin 2\alpha=1+18\sqrt{5}\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

Так как угол $\alpha\in$ IV четверти, то $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\dfrac{4}{9}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

$$1+9\sqrt{5}\sin 2\alpha=1+18\sqrt{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}=1-4\cdot 5=-19$$

4) $4+27\cos 2\alpha=4+27\left(2\cos^2\alpha-1\right)=4+27\cdot\left(\dfrac{8}{9}-1\right)=4-3=1$

5) $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$

$\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=1{,}4$

$\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=1{,}4^2$

$\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1{,}96$

$1+\sin\alpha=1{,}96 \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha=0{,}96$

6) $\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}$

Воспользуемся искусственным приемом: умножим и разделим заданное выражение на $2\sin\frac{\pi}{9}$, а затем воспользуемся формулой двойного аргумента:

$$\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}\cdot2\sin\frac{\pi}{9}}{2\sin\frac{\pi}{9}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}}{2\sin\frac{\pi}{9}}\Bigg|\cdot\frac{2}{2}=\frac{\sin\frac{4\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}}{4\sin\frac{\pi}{9}}\Bigg|\cdot\frac{2}{2}=\frac{\sin\frac{8\pi}{9}}{8\sin\frac{\pi}{9}}=$$

$$=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right)}{8\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{\sin\frac{\pi}{9}}{8\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{1}{8}$$

Замечание: Произведение косинусов, аргументы которых удваиваются, можно упростить умножением и делением его на синус наименьшего угла с последующим «свертыванием» числителя с помощью формулы двойного аргумента.

7) $\sin10°\cdot\sin50°\cdot\sin70°$

Умножим и разделим заданное выражение на $2\cos10°$:

$$\frac{\sin 10°\cdot\sin 50°\cdot\sin 70°\cdot 2\cos 10°}{2\cos 10°}=\frac{\sin 20°\cdot\sin 50°\cdot\sin 70°}{2\cos 10°}=$$

$$=\frac{\sin 20°\cdot\sin 50°\cdot\cos 20°}{2\cos 10°}\bigg|\cdot\frac{2}{2}=\frac{\sin 40°\cdot\sin 50°}{4\cos 10°}=\frac{\sin 40°\cdot\cos 40°}{4\cos 10°}\bigg|\cdot\frac{2}{2}=$$

$$=\frac{\sin 80°}{8\cos 10°}=\frac{\cos 10°}{8\cos 10°}=\frac{1}{8}$$

8) $$\frac{4\sin 20°\cdot\sin 50°\cdot\sin 70°}{\sin 80°}=\frac{4\sin 20°\cdot\sin 50°\cdot\cos 20°}{\sin 80°}=$$

$$=\frac{2\sin 40°\cdot\sin 50°}{\sin 80°}=\frac{2\sin 40°\cdot\cos 40°}{\sin 80°}=\frac{\sin 80°}{\sin 80°}=1$$

1.10. Упростите:

1) $$\frac{\sin(60°+\alpha)}{4\sin\left(15°+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(75°-\frac{\alpha}{4}\right)}$$

2) $$\frac{1-4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

3) $$\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{3}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}\right)\operatorname{tg}\frac{2\alpha}{3}$$

4) $$\frac{1+\operatorname{ctg}2\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$$

5) $$\frac{\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}$$

6) $$\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{tg}2\alpha}$$

7) $$(\sin\alpha)^{-1}+(\operatorname{tg}\alpha)^{-1}$$

8) $$1-\frac{1}{1-\sin^{-1}\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}$$

Решение:

1) $$\frac{\sin(60°+\alpha)}{4\sin\left(15°+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(75°-\frac{\alpha}{4}\right)}=\frac{\sin(60°+\alpha)}{4\sin\left(15°+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(90°-\left(15°+\frac{\alpha}{4}\right)\right)}=$$

$$=\frac{\sin(60°+\alpha)}{2\cdot 2\sin\left(15°+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(15°+\frac{\alpha}{4}\right)}=\frac{\sin\left(2\cdot\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{2\sin\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$\frac{\sin\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)}=\cos\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)$$

2) $$\frac{1-4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{1-\sin^2 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{\cos^2 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\cos 2\alpha$$

3) $$\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{3}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}\right)\operatorname{tg}\frac{2\alpha}{3}=\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}\right)\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}}=2$$

4) $$\frac{1+\operatorname{ctg}2\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{1+\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha}{\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\frac{2+\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2}}{\frac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}}=$$

$$=\frac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{2}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2}$$

5) $$\frac{\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}=\frac{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha}{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha-4\sin^2\alpha-4\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{4\sin^2\alpha\left(\cos^2\alpha-1\right)}{4\cos^2\alpha\left(\sin^2\alpha-1\right)}=\operatorname{tg}^2\alpha\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$$

6) $$\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{tg}2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\frac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}-\operatorname{tg}2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}2\alpha\left(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha\right)}{\operatorname{tg}2\alpha\left(2-1+\operatorname{tg}^2 2\alpha\right)}=\frac{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}=$$

$$=\frac{1-\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}}{1+\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}}=\frac{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha}=\cos 4\alpha$$

7) $$(\sin\alpha)^{-1}+(\operatorname{tg}\alpha)^{-1}=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{1+2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

8) $$1-\frac{1}{1-\sin^{-1}\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)}}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{-\cos 2\alpha}}=$$

$$=1-\frac{1}{1+\frac{1}{\cos 2\alpha}}=1-\frac{1}{\frac{1+\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}}=1-\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha+1}=\frac{\cos 2\alpha+1-\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha+1}=$$

$$=\frac{1}{\cos 2\alpha+1}=\frac{1}{2\cos^2\alpha}$$

Применение тригонометрических формул половинного аргумента

Формулами половинного аргумента называются формулы, выражающие значения тригонометрических функций аргумента $\frac{\alpha}{2}$ через значения тригонометрических функций аргумента α :

$$\left.\begin{aligned}\sin^2\frac{\alpha}{2}&=\frac{1-\cos\alpha}{2}\\ \cos^2\frac{\alpha}{2}&=\frac{1+\cos\alpha}{2}\end{aligned}\right\}\text{ - формулы понижения степени}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \left(\alpha\neq\pi k,\quad k\in Z\right)$$

Формулы понижения степени рекомендуется использовать в преобразованиях выражений, содержащих степени тригонометрических функций.

1.11. Вычислите:

1) $\cos^2\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=0,4$

2) $\sin\frac{\pi}{8}$

3) $\operatorname{tg}112°30'$

4) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, если $\cos 2\alpha=\frac{5}{13}$

5) $\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

6) $\dfrac{1+\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}$

***Решение*:**

1) $\cos\alpha=0,4 \quad\Rightarrow\quad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{1+0,4}{2}=0,7$

2) $\sin^2\frac{\pi}{8}=\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

Так как $\sin\frac{\pi}{8}>0$, то $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

3) $\operatorname{tg}112^\circ30'=\dfrac{1-\cos225^\circ}{\sin225^\circ}=\dfrac{1-\cos(180^\circ+45^\circ)}{\sin(180^\circ+45^\circ)}=\dfrac{1+\cos45^\circ}{-\sin45^\circ}=-\dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=$

$=-\left(1+\sqrt{2}\right)$

4) $\cos2\alpha=\frac{5}{13}$

$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\left(\sin^2\alpha\right)^2+\left(\cos^2\alpha\right)^2=\left(\dfrac{1-\cos2\alpha}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1+\cos2\alpha}{2}\right)^2=$

$=\dfrac{2+2\cos^2 2\alpha}{4}=\dfrac{1+\cos^2 2\alpha}{2}=\dfrac{1+\frac{25}{169}}{2}=\dfrac{97}{169}$

5) $\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}=\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}+\dfrac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}+\dfrac{1-\cos\frac{5\pi}{4}}{2}+$

$+\dfrac{1+\cos\frac{7\pi}{4}}{2}=\dfrac{4-\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)}{2}=$

$$=\frac{4-\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{4}{2}=2$$

б) $$\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{4}-2\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}}{2\sin^2\frac{\alpha}{4}-2\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{4}\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}\right)}=$$

$$=-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$$

Формулы универсальной подстановки

Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента, записываются в виде:

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq\pi(2n+1),\quad n\in\mathbb{Z}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq\pi(2n+1),\quad n\in\mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad \alpha\neq\pi(2n+1),\quad k,\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$$

С помощью этих формул можно представить все тригонометрические функции аргумента α в виде рациональных выражений относительно $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

1.12. Вычислите:

1) $\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} 2\alpha = 4$

2) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 0,5$

3) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -2,4$ и $90° < \frac{\alpha}{2} < 135°$

Решение:

1) $\operatorname{tg} 2\alpha = 4$

$$\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha} + \frac{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} =$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}^2 2\alpha + 1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha}{\left(1+\operatorname{tg}^2 2\alpha\right)\cdot \operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1}{4}$$

2) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 0,5$

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right) = -\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) =$$

$$= -\left(\cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha\right) = 1 - 2\cos^2\alpha = 1 - 2\cdot\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = 1 - 2\cdot\left(\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}\right)^2 =$$

$$= 1 - 2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$$

3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -2,4$ и $90° < \frac{\alpha}{2} < 135°$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{-2\cdot 2,4}{1+5,76} = \frac{-4,8}{6,76} = -\frac{480}{676} = -\frac{120}{169}$$

$180° < \alpha < 270°$

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{120}{169}\right)^2} = -\sqrt{\frac{169^2-120^2}{169^2}} = -\sqrt{\frac{49\cdot 289}{169^2}} =$$

$$=-\frac{7\cdot 17}{169}=-\frac{119}{169}$$

1.13. Упростите:

1) $\frac{4\operatorname{tg}\alpha\left(1-\operatorname{tg}^2\alpha\right)}{\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)^2}$ 2) $\frac{tg^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-1}{1+tg^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$ 3) $\frac{\left(1+\operatorname{tg}2\alpha\right)^2-2\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}-\sin 4\alpha-1$

***Решение*:**

1) $$\frac{4\operatorname{tg}\alpha\left(1-\operatorname{tg}^2\alpha\right)}{\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)^2}=\frac{2\cdot 2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=\sin 4\alpha$$

2) $$\frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-1}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=-\frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=\sin 2\alpha$$

3) $$\frac{\left(1+\operatorname{tg}2\alpha\right)^2-2\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}-\sin 4\alpha-1=\frac{1+2\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}^2 2\alpha-2\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}-$$

$$-\frac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}-1=\frac{1+2\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}^2 2\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}=\frac{-2\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}=$$

$$=\frac{-2\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}}{1+\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}}=\frac{-2\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha}=-2\sin^2 2\alpha$$

Применение формул преобразования суммы (разности) тригонометрических функций в произведение

Часто необходимо сумму тригонометрических функций представить в виде произведения. Такое преобразование бывает полезно при решении тригонометрических уравнений, для того чтобы преобразовать в произведение левую часть уравнения, у которого правая часть равна нулю. После этого решение тригонометрического уравнения обычно сводится к решению простейших тригонометрических уравнений.

Следующие формулы позволяют выполнить такие преобразования:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}, \quad \left(\alpha,\ \beta \ne \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}, \quad (\alpha,\ \beta \ne \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z})$$

1.14. Следующие выражения преобразуйте в произведения:

1) $\sqrt{3} \pm \operatorname{tg}\alpha$

2) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha$

3) $\operatorname{tg}9^\circ - \operatorname{tg}63^\circ + \operatorname{tg}81^\circ - \operatorname{tg}27^\circ$

4) $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + 2\beta\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} - 2\beta\right)$

5) $\dfrac{\cos(\alpha + 32^\circ) + \cos(\alpha - 28^\circ)}{\sin(88^\circ - \alpha)}$

6) $3 - 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

7) $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ$

8) $\dfrac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$

Решение:

1) $\sqrt{3} \pm \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \pm \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3} \pm \alpha\right)}{\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\alpha} = \dfrac{2\sin\left(\frac{\pi}{3} \pm \alpha\right)}{\cos\alpha}$

2) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha = (1 + \cos\alpha) + \sin\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} =$

$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\frac{\alpha}{2}\right) =$

$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin 45^\circ\cdot\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$$

3) $\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}63^\circ+\operatorname{tg}81^\circ-\operatorname{tg}27^\circ$

Рекомендация: Выделите в рассматриваемом выражении те значения тригонометрических функций, у которых аргументы в сумме или разности дают угол, кратный $\frac{\pi}{2}$, затем сгруппируйте их соответствующим образом и упростите

$$(\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{tg}81^\circ)-(\operatorname{tg}63^\circ+\operatorname{tg}27^\circ)=\frac{\sin 90^\circ}{\cos 9^\circ\cdot\cos 81^\circ}-\frac{\sin 90^\circ}{\cos 63^\circ\cdot\cos 27^\circ}=$$

$$=\frac{1}{\cos 9^\circ\cdot\cos(90^\circ-9^\circ)}-\frac{1}{\cos(90^\circ-27^\circ)\cdot\cos 27^\circ}=\frac{1}{\cos 9^\circ\cdot\sin 9^\circ}-$$

$$-\frac{1}{\sin 27^\circ\cdot\cos 27^\circ}=\frac{2}{\sin 18^\circ}-\frac{2}{\sin 54^\circ}=2\frac{\sin 54^\circ-\sin 18^\circ}{\sin 18^\circ\cdot\sin 54^\circ}=$$

$$=4\frac{\sin 18^\circ\cdot\cos 36^\circ}{\sin 18^\circ\cdot\sin(90^\circ-36^\circ)}=4\frac{\cos 36^\circ}{\cos 36^\circ}=4$$

4) $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+2\beta\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right)=\frac{1-\cos(\alpha+4\beta)}{2}-\frac{1-\cos(\alpha-4\beta)}{2}=$

$$=-\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+4\beta)-\cos(\alpha-4\beta)\right)=-\frac{1}{2}\cdot(-2)\sin\alpha\cdot\sin 4\beta=\sin\alpha\cdot\sin 4\beta$$

5) $\frac{\cos(\alpha+32^\circ)+\cos(\alpha-28^\circ)}{\sin(88^\circ-\alpha)}=\frac{2\cos\frac{\alpha+32^\circ+\alpha-28^\circ}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+32^\circ-\alpha+28^\circ}{2}}{\sin(88^\circ-\alpha)}=$

$$=\frac{2\cos(\alpha+2^\circ)\cdot\cos 30^\circ}{\sin(90^\circ-(\alpha+2^\circ))}=\frac{\sqrt{3}\cos(\alpha+2^\circ)}{\cos(\alpha+2^\circ)}=\sqrt{3}$$

6) $3-4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=3-4\cos^2\alpha=3-4\cdot\frac{1+\cos 2\alpha}{2}=1-2\cos 2\alpha=$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\cos 2\alpha\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\alpha\right)=-4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=$$

$$=4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$$

7) $\sin 47^\circ+\sin 61^\circ-\sin 11^\circ-\sin 25^\circ=\left(\sin 47^\circ+\sin 61^\circ\right)-\left(\sin 11^\circ+\sin 25^\circ\right)=$

$$=2\sin 54^\circ\cdot\cos 7^\circ-2\sin 18^\circ\cdot\cos 7^\circ=2\cos 7^\circ\cdot\left(\sin 54^\circ-\sin 18^\circ\right)=$$

$$=4\cos 7^\circ\cdot\sin 18^\circ\cdot\cos 36^\circ=2\cos 7^\circ\cdot\frac{\sin 36^\circ}{\cos 18^\circ}\cdot\cos 36^\circ=$$

$$=\cos 7^\circ\cdot\frac{2\sin 36^\circ\cdot\cos 36^\circ}{\cos\left(90^\circ-72^\circ\right)}=\cos 7^\circ\cdot\frac{\sin 72^\circ}{\sin 72^\circ}=\cos 7^\circ$$

8) $\dfrac{2\cos 40^\circ-\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}=\dfrac{\cos 40^\circ+\left(\cos 40^\circ-\cos 20^\circ\right)}{\sin 20^\circ}=$

$$=\frac{\cos\left(90^\circ-50^\circ\right)-2\sin 10^\circ\cdot\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\sin 50^\circ-\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{2\sin 20^\circ\cdot\cos 30^\circ}{\sin 20^\circ}=\sqrt{3}$$

1.15. Следующие выражения преобразуйте в произведения:

1) $\cos 2\alpha-\cos 3\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha$

2) $\sin 4\alpha-\sin 5\alpha-\sin 6\alpha+\sin 7\alpha$

3) $\dfrac{\sin\alpha+3\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+3\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}$

Решение:

1) $\cos 2\alpha-\cos 3\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha=\left(\cos 2\alpha+\cos 5\alpha\right)-\left(\cos 3\alpha+\cos 4\alpha\right)=$

$$=2\cos\frac{7\alpha}{2}\cdot\cos\frac{3\alpha}{2}-2\cos\frac{7\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{7\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\cos\frac{7\alpha}{2}\left(-2\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)=-4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\frac{7\alpha}{2}$$

2) $\sin 4\alpha-\sin 5\alpha-\sin 6\alpha+\sin 7\alpha=\left(\sin 4\alpha+\sin 7\alpha\right)-\left(\sin 5\alpha+\sin 6\alpha\right)=$

$$=2\sin\frac{11\alpha}{2}\cdot\cos\frac{3\alpha}{2}-2\sin\frac{11\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{11\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\sin\frac{11\alpha}{2}\left(-2\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)=-4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\sin\frac{11\alpha}{2}$$

3) $\dfrac{\sin\alpha+3\sin2\alpha+\sin3\alpha}{\cos\alpha+3\cos2\alpha+\cos3\alpha}=\dfrac{(\sin\alpha+\sin3\alpha)+3\sin2\alpha}{(\cos\alpha+\cos3\alpha)+3\cos2\alpha}=$

$=\dfrac{2\sin2\alpha\cdot\cos\alpha+3\sin2\alpha}{2\cos2\alpha\cdot\cos\alpha+3\cos2\alpha}=\dfrac{\sin2\alpha\cdot(2\cos\alpha+3)}{\cos2\alpha\cdot(2\cos\alpha+3)}=tg2\alpha$

Применение формул преобразования произведения тригонометрических функций в сумму (разность)

Часто оказываются полезными формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму (разность). Обычно они используются при упрощении тригонометрических выражений, при нахождении производных и интегралов от функций, содержащих тригонометрические выражения, а также при решении тригонометрических уравнений и неравенств.

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

1.16. Вычислите:

1) $16\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{3\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$

2) $\sin^2\alpha+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$

3) $\sin20°\cdot\sin40°\cdot\sin80°$

4) $\dfrac{1}{2\sin10°}-2\sin70°$

5) $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}$

6) $\sin4°\cdot\sin86°-\cos2°\cdot\sin6°+\dfrac{1}{2}\sin4°$

Решение:

1) $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$

$16\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{3\alpha}{2}=16\cdot\dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{3\alpha}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{3\alpha}{2}\right)\right)=$

$=8(\cos\alpha-\cos2\alpha)=8(\cos\alpha-2\cos^2\alpha+1)=8\left(\dfrac{3}{4}-2\cdot\dfrac{9}{16}+1\right)=8\cdot\dfrac{5}{8}=5$

2) $\sin^2\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\sin^2\alpha+\frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha-\cos\frac{2\pi}{3}\right)=$

$=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{\cos 2\alpha}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

3) В тех случаях, когда необходимо преобразовать в сумму произведение трех и более тригонометрических функций, формулы применяют повторно.

$\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ=(\sin 20^\circ\cdot\sin 80^\circ)\cdot\sin 40^\circ=$

$=\frac{1}{2}(\cos 60^\circ-\cos 100^\circ)\cdot\sin 40^\circ=\frac{1}{4}\sin 40^\circ-\frac{1}{2}\cos 100^\circ\cdot\sin 40^\circ=$

$=\frac{1}{4}\sin 40^\circ-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\sin(-60^\circ)+\sin 140^\circ)=\frac{1}{4}\sin 40^\circ+\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{4}\sin 40^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}$

4) $\frac{1}{2\sin 10^\circ}-2\sin 70^\circ=\frac{1-4\sin 10^\circ\cdot\sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ}=$

$=\frac{1-4\cdot\frac{1}{2}(\cos 60^\circ-\cos 80^\circ)}{2\sin 10^\circ}=\frac{1-1+2\cos 80^\circ}{2\sin 10^\circ}=\frac{2\sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ}=1$

5) $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)\cdot\frac{2\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$

$=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$

$=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}$

Рекомендация. Суммы

$$\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx \quad \text{и} \quad \sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$$

преобразуют умножением и делением на $2\sin\frac{x}{2}$ с последующим применением к слагаемым формул преобразования произведения тригонометрических функций в сумму или разность.

6) $\sin 4°\cdot\sin 86° - \cos 2°\cdot\sin 6° + \frac{1}{2}\sin 4° = \frac{1}{2}(\cos 82° - \cos 90°) -$

$-\frac{1}{2}(\sin 4° + \sin 8°) + \frac{1}{2}\sin 4° = \frac{1}{2}\sin 8° - \frac{1}{2}\sin 4° - \frac{1}{2}\sin 8° + \frac{1}{2}\sin 4° = 0$

Вычисление значений тригонометрических функций от аркфункций

При вычислении значений тригонометрических функций от аркфункций необходимо знать, что:

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2} \qquad -\frac{\pi}{2} < \mathrm{arc\,tg}\, x < \frac{\pi}{2}$$

$$0 \le \arccos x \le \pi \qquad 0 < \mathrm{arc\,ctg}\, x < \pi$$

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \text{и} \quad \cos(\arccos x) = x, \text{ если } |x| \le 1$$

$$\mathrm{tg}(\mathrm{arc\,tg}\, x) = x \quad \text{и} \quad \mathrm{ctg}(\mathrm{arc\,ctg}\, x) = x, \text{ если } x \in \mathbb{R}$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x \qquad \mathrm{arc\,tg}(-x) = -\mathrm{arc\,tg}\, x$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x \qquad \mathrm{arc\,ctg}(-x) = \pi - \mathrm{arc\,ctg}\, x$$

В тех случаях, когда аргумент выражен через обратные тригонометрические функции, надо преобразовать данное выражение таким образом, чтобы можно было воспользоваться определением обратных тригонометрических функций.

1.17. Вычислите:

1) $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{7}\right) - \mathrm{arc\,tg}\left(\mathrm{tg}\frac{6\pi}{7}\right) - \arccos\left(\cos\frac{8\pi}{7}\right) + \mathrm{arc\,ctg}\left(\mathrm{ctg}\left(-\frac{3\pi}{7}\right)\right)$

2) $\mathrm{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$

3) $\cos\left(\mathrm{arc\,tg}\left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{3\pi}{2}\right)$

4) $\sin(\mathrm{arc\,tg}(-3))$

5) $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{7}\right)$

6) $\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{arc\,ctg}\, 3\right)$

7) $\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{12}{13}$

8) $\mathrm{arc\,tg}\, 2 + \mathrm{arc\,tg}\, 3$

Решение:

1) $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{7}\right)-\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{6\pi}{7}\right)-\arccos\left(\cos\frac{8\pi}{7}\right)+\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{7}\right)\right)=$

$=\arcsin\left(\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{7}\right)\right)-\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)\right)-\arccos\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)\right)+$

$+\operatorname{arcctg}\left(-\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{7}\right)=\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{7}\right)-\operatorname{arctg}\left(-\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\right)-\arccos\left(-\cos\frac{\pi}{7}\right)+$

$+\operatorname{arcctg}\left(-\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{7}\right)=\frac{2\pi}{7}-\left(-\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\right)\right)-\left(\pi-\arccos\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)\right)+$

$+\pi-\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{7}\right)=\frac{2\pi}{7}+\frac{\pi}{7}-\pi+\frac{\pi}{7}+\pi-\frac{3\pi}{7}=\frac{\pi}{7}$

2) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{\pi}{2}\right)$

Обозначим $\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)=\alpha$, тогда $\sin\alpha=-\frac{1}{4}$ и $\alpha\in$ IV четверти.

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\frac{\sqrt{15}}{4}:\left(-\frac{1}{4}\right)=\sqrt{15}$

3) $\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)-\frac{3\pi}{2}\right)$

Обозначим $\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)=\alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{2}{3}$ и $\alpha\in$ IV четверти.

$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}\ \Rightarrow\ 1+\frac{9}{4}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\ \Rightarrow\ \sin^2\alpha=\frac{4}{13}\ \Rightarrow\ \sin\alpha=-\frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)-\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=$

$=-\sin\alpha=-\left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)=\frac{2\sqrt{13}}{13}$

4) $\sin\left(\operatorname{arctg}(-3)\right)$

Обозначим $\operatorname{arctg}(-3)=\alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha=-3$ и $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$.

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+9=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{1}{10} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\sin\left(\operatorname{arctg}(-3)\right)=\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=-3\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

5) $\sin\left(2\arcsin\dfrac{1}{7}\right)$

Обозначим $\arcsin\dfrac{1}{7}=\alpha$, тогда $\sin\alpha=\dfrac{1}{7}$ и $\alpha\in$ I четверти.

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{49}}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\sin\left(2\arcsin\frac{1}{7}\right)=\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{8\sqrt{3}}{49}$$

6) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg}3\right)$

Обозначим $\operatorname{arcctg}3=\alpha$, тогда $\operatorname{ctg}\alpha=3$ и $\alpha\in$ I четверти.

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow 1+9=\frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \sin^2\alpha=\frac{1}{10} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}3\right)=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{\sqrt{10}}}{1+\frac{3}{\sqrt{10}}}=\frac{1}{\sqrt{10}+3}=\sqrt{10}-3$$

7) $\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{12}{13}$

Обозначим:

$\arcsin\frac{3}{5}=\alpha$

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$

$\alpha\in$ I четверти

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$

$\arcsin\frac{12}{13}=\beta$

$\sin\beta=\frac{12}{13}$

$\beta\in$ I четверти

$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\frac{5}{13}$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$0<\beta<\frac{\pi}{2}$

$0<\alpha+\beta<\pi$,

то есть $\alpha+\beta$ лежит в области значений арккосинуса.

$\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{12}{13}=\alpha+\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}-\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}=-\frac{16}{65}$

Тогда $\alpha+\beta=\arccos\left(-\frac{16}{65}\right)$.

Замечание: Распространенная ошибка при решении таких задач состоит в том, что не учитывается величина аргумента $\alpha+\beta$.

Рассуждают так: по формуле синуса суммы чисел можно записать:

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}=\frac{63}{65}$

А затем делается ошибочный вывод о том, что $\alpha+\beta=\arcsin\left(\frac{63}{65}\right)$, хотя число $\alpha+\beta$ не лежит в области значений арксинуса, так как $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$.

8) $\operatorname{arc\,tg} 2 + \operatorname{arc\,tg} 3$

Обозначим:

$\operatorname{arc\,tg} 2 = \alpha$ $\qquad$ $\operatorname{arc\,tg} 3 = \beta$

$\operatorname{tg}\alpha = 2$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\beta = 3$

$\alpha \in$ I четверти $\qquad$ $\beta \in$ I четверти

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{3}$

$$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \pi,$$

то есть $\alpha + \beta$ лежит в области значений арккотангенса.

$$\operatorname{arc\,tg} 2 + \operatorname{arc\,tg} 3 = \alpha + \beta$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = -\frac{5}{6} : \frac{5}{6} = -1$$

Тогда $\alpha + \beta = \operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$.

§2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Тригонометрическим уравнением называется уравнение, содержащее неизвестное только в аргументе тригонометрической функции. Основная цель при решении тригонометрических уравнений состоит в преобразовании тригонометрических выражений, входящих в уравнение, таким образом, чтобы рассматриваемое уравнение привелось к нескольким простейшим уравнениям, которые решаются стандартным способом.

В каждом конкретном примере необходимо найти свой способ преобразования рассматриваемого уравнения. Иногда приходится перебирать разные преобразования, применять различные идеи, прежде чем удастся найти тот путь, который приведет к цели. Успех в решении тригонометрических уравнений будет достигнут при наличии хороших знаний тригонометрических формул и умений грамотно проводить тригонометрические преобразования, что вырабатывается только достаточной практикой.

Решение тригонометрического уравнения можно свести к решению нескольких простейших тригонометрических уравнений следующими методами:

- разложение на множители;
- введение новой переменной;
- введение вспомогательного угла;
- использование ограниченности функций $y = \sin x$, $y = \cos x$.

Важно отметить, что форма записи корней тригонометрического уравнения часто зависит от того, какой метод применяется для решения данного уравнения.

Рассмотрим основные типы тригонометрических уравнений и методы их решения.

Решение простейших тригонометрических уравнений

$\sin x = a$, $-1 \le a \le 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$, $-1 \le a \le 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Частные случаи тригонометрических уравнений

$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = 0$	$x = \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = 1$	$x = 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{tg}\, x = -1$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{tg}\, x = 0$	$x = \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{tg}\, x = 1$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{ctg}\, x = -1$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{ctg}\, x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{ctg}\, x = 1$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$

2.1. Решите уравнение: $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$.

Решение:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$$

$$2x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n\,,\quad n\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{\pi}{8}\pm\frac{\pi}{12}+\pi n\,,\quad n\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{8}\pm\frac{\pi}{12}+\pi n\,,\quad n\in\mathbb{Z}$.

2.2. Решите уравнение $\cos\left(7x-\frac{\pi}{6}\right)=-1$ и найдите сумму корней, принадлежащих интервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение:

$$7x-\frac{\pi}{6}=\pi+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$$

$$7x=\frac{7\pi}{6}+2\pi n\,,\quad n\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{7}\,,\quad n\in\mathbb{Z}$$

Выберем те значения переменной x, которые принадлежат интервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$:

$$n=0\,;\quad x=\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$$

$$n=1\,;\quad x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{7}=\frac{19\pi}{42}\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$$

$$n=2\,;\quad x=\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{7}=\frac{31\pi}{42}\notin\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$$

$$n=-1\,;\quad x=\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{7}=-\frac{5\pi}{42}\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$$

$$n=-2\,;\quad x=\frac{\pi}{6}-\frac{4\pi}{7}=-\frac{17\pi}{42}\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$$

$n=-3$; $x=\frac{\pi}{6}-\frac{6\pi}{7}=-\frac{29\pi}{42}\notin\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{\pi}{6}+\frac{19\pi}{42}-\frac{5\pi}{42}-\frac{17\pi}{42}=\frac{4\pi}{42}=\frac{2\pi}{21}$$

Ответ: $\frac{2\pi}{21}$.

2.3. Решите уравнение: $\cos^2 3x=\frac{1}{2}$.

Решение:

Используя формулу понижения степени, получим:

$$\frac{1+\cos 6x}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\cos 6x=0$$

$$6x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6},\quad n\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6}$, $n\in\mathbb{Z}$.

2.4. Решите уравнение: $\operatorname{tg}^2 x=3$.

Решение:

$$\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{3}$$

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

2.5. Решите уравнение: $\operatorname{tg}\left(\pi x^2\right)=1$.

Решение:

$$\pi x^2=\frac{\pi}{4}+\pi n$$

$x^2 = \frac{1}{4} + n, \quad n \in \mathbb{Z}$

$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4n+1}$, где $n = 0;\ 1;\ 2;\ 3...$

Ответ: $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0$.

2.6. Решите уравнение: $\cos x = \frac{\pi}{3}$.

Решение:

Поскольку $\frac{\pi}{3} \approx 1{,}04 > 1$, уравнение решений не имеет.

Ответ: Решений нет.

Решение тригонометрических уравнений, левая и правая части которых являются одноименными тригонометрическими функциями

1. $\sin\alpha = \sin\beta \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \alpha - \beta = 2\pi n \\ \alpha + \beta = \pi + 2\pi k \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = \beta + 2\pi n \\ \alpha = \pi - \beta + 2\pi k \end{array}\right. \quad n, k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = (-1)^k \beta + \pi k, \quad k \in Z$

2. $\cos\alpha = \cos\beta \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \alpha - \beta = 2\pi n \\ \alpha + \beta = 2\pi k \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = \beta + 2\pi n \\ \alpha = -\beta + 2\pi k \end{array}\right. \quad n, k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \pm\beta + 2\pi k, \quad k \in Z$

3. $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\beta \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha - \beta = \pi n \\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = \beta + \pi n \\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \end{array}\right. \quad n, k \in \mathbb{Z}$

4. $\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\,\beta \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha - \beta = \pi n \\ \beta \neq \pi k \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = \beta + \pi n \\ \beta \neq \pi k \end{array}\right. \quad n, k \in \mathbb{Z}$

2.7. Решите уравнение:

1) $\sin 5x = -\sin x$ 2) $\cos 3x = \cos 12°$

3) $\cos 3x = \sin x$ 4) $\operatorname{tg} 11x = \operatorname{tg} x$

Решение:

1) $\sin 5x = -\sin x$

$\sin 5x = \sin(-x)$

$$\left[\begin{array}{l} 5x-(-x)=2\pi n \\ 5x+(-x)=\pi+2\pi k \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 6x=2\pi n \\ 4x=\pi+2\pi k \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi n}{3} \\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2} \end{array}\right. \quad n,k\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi n}{3}$, $x=\dfrac{\pi}{4}(2k+1)$, $n,k\in\mathbb{Z}$.

2) $\cos 3x = \cos 12°$

$$\left[\begin{array}{l} 3x=12°+2\pi n \\ 3x=-12°+2\pi k \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=4°+120°n \\ x=-4°+120°k \end{array}\right. \quad n,k\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $x=\pm 4°+120°n$, $n\in\mathbb{Z}$.

3) $\cos 3x = \sin x$

$\cos 3x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

$$\left[\begin{array}{l} 3x=\dfrac{\pi}{2}-x+2\pi n \\ 3x=-\dfrac{\pi}{2}+x+2\pi k \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n \\ 2x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2} \\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k \end{array}\right. \quad n,k\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{8}(4n+1)$, $x=\dfrac{\pi}{4}(4k-1)$, $n,k\in\mathbb{Z}$.

4) $\operatorname{tg} 11x = \operatorname{tg} x$

$$\begin{cases} 11x - x = \pi n \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{10} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi n}{10} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\frac{n}{10} \neq \frac{1}{2} + k \quad \Rightarrow \quad n \neq 5 + 10k$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{10}$, где $n \neq 5 + 10k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

Метод разложения на множители

При решении тригонометрического уравнения данным методом можно пользоваться всеми известными способами разложения на множители алгебраических выражений: вынесение за скобки общего множителя, группировка, применение формул сокращенного умножения. Путем разложения на множители тригонометрическое уравнение приводится к виду, когда левая часть – произведение тригонометрических функций, а правая часть – нуль. Таким образом, исходное уравнение распадается на несколько более простых уравнений.

Необходимо также знать следующие формулы:

- сложения аргументов тригонометрических функций;
- понижения степени тригонометрических функций;
- преобразования произведения тригонометрических функций в сумму;
- преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.

Перейдем к решению тригонометрических уравнений данным методом.

2.8. Решите уравнение: $\sin\frac{x}{2}\cdot\sin x=0$.

Решение:

1) $\sin\frac{x}{2}=0$ 2) $\sin x=0$

$\frac{x}{2}=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ $x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$x=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

Очевидно, что множество решений в первом случае является подмножеством решений во втором случае:

$n=0;\ \ x=0$ $k=0;\ \ x=0$

$n=1;\ \ x=2\pi$ $k=1;\ \ x=\pi$

$k=2;\ \ x=2\pi$

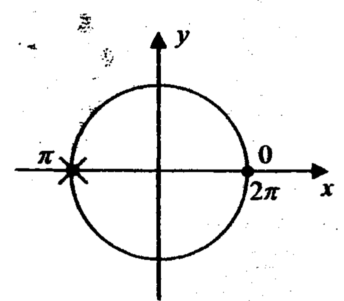
Ответ: $x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

2.9. Решите уравнение: $\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$.

Решение:

$$\begin{cases}\sin x=0\\ \cos x\neq -1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$



Отбрасывая из множества решений $x=\pi n$ значения, входящие в серию $x=\pi+2\pi k$, получаем $x=2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $x=2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.

2.10. Решите уравнение: $2\sin 2x+\sin x=0$.

Решение:

$4\sin x\cdot\cos x+\sin x=0$

$\sin x(4\cos x+1)=0$

1) $\sin x = 0$

$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

2) $4\cos x + 1 = 0$

$\cos x = -\frac{1}{4}$

$x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{4}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \pi n, \quad x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{4}\right) + 2\pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}$.

2.11. Решите уравнение: $1 + \sin x \cdot \cos 2x = \sin x + \cos 2x$.

Решение:

$1 + \sin x \cdot \cos 2x - \sin x - \cos 2x = 0$

$(1 - \sin x) - \cos 2x(1 - \sin x) = 0$

$(1 - \sin x)(1 - \cos 2x) = 0$

1) $\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

2) $\cos 2x = 1$

$2x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x = \pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}$.

2.12. Решите уравнение: $\cos 3x \cdot \cos 2x = \sin 3x \cdot \sin 2x$.

Решение:

$\cos 3x \cdot \cos 2x - \sin 3x \cdot \sin 2x = 0$

Применим следующую формулу сложения аргументов:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta .$$

$\cos(3x + 2x) = 0$

$\cos 5x = 0$

$5x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}$.

2.13. Решите уравнение: $\cos 4x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 6x\right)$.

Решение:

$\cos 4x = \cos 6x$

$\cos 6x - \cos 4x = 0$

Применим следующую формулу преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$-2\sin 5x \cdot \sin x = 0$

$\sin 5x \cdot \sin x = 0$

1) $\sin 5x = 0$

$5x = \pi n$

$x = \frac{\pi n}{5}, \ n \in \mathbb{Z}$

2) $\sin x = 0$

$x = \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

Решения вида $\frac{\pi n}{5}$ включают в себя все решения вида πk, при $n = 5k$.

Ответ: $x = \frac{\pi n}{5}, \ n \in \mathbb{Z}$.

2.14. Решите уравнения:

1) $\sin 7x + \sin 3x = 2\cos 2x$

2) $\sin x - 3\cos 3x + \sin 7x = 0$ Найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение:

1) Применим следующую формулу преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$2\sin 5x \cdot \cos 2x = 2\cos 2x$

$2\cos 2x(\sin 5x-1)=0$

1) $\cos 2x=0$

$2x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$

2) $\sin 5x=1$

$5x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5},\ k\in\mathbb{Z}$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5},\ n,k\in\mathbb{Z}$.

2) $\sin x-3\cos 3x+\sin 7x=0$

$2\sin 4x\cdot\cos 3x-3\cos 3x=0$

$\cos 3x(2\sin 4x-3)=0$

1) $\cos 3x=0$

$3x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

$x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

2) $2\sin 4x-3=0$

$\sin 4x=\frac{3}{2}$

решений нет, так как $|\sin 4x|\le 1$

Найдем целые решения двойного неравенства:

$-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}\le\frac{\pi}{2}$

$-\frac{5\pi}{12}\le\frac{\pi k}{3}\le\frac{\pi}{3}$

$-\frac{5}{4}\le k\le 1\ \Rightarrow\ k\in\{-1;\ 0;\ 1\}$

Значит, $x=-\frac{\pi}{6},\ x=\frac{\pi}{6},\ x=\frac{\pi}{2}$

Ответ: $x\in\left\{-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}\right\}$.

2.15. Решите уравнение: $\cos 4x\cdot\cos 5x=\cos 6x\cdot\cos 7x$.

Решение:

Применим формулу преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right).$$

$$\frac{1}{2}(\cos 9x+\cos x)=\frac{1}{2}(\cos 13x+\cos x)$$

$$\cos 13x=\cos 9x$$

$$\left[\begin{array}{l}13x=9x+2\pi n\\13x=-9x+2\pi k\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}4x=2\pi n\\22x=2\pi k\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{ll}x=\dfrac{\pi n}{2}, & n\in\mathbb{Z}\\x=\dfrac{\pi k}{11}, & k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi k}{11},\ x=\dfrac{\pi n}{2},\ n,k\in\mathbb{Z}$.

2.16. Решите уравнение: $\cos^4\dfrac{x}{2}-\sin^4\dfrac{x}{2}=\sin 2x$.

***Решение*:**

$$\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=\sin 2x$$

$$\cos x=2\sin x\cdot\cos x$$

$$\cos x(1-2\sin x)=0$$

1) $\cos x=0$

$x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

2) $\sin x=\dfrac{1}{2}$

$x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ n,k\in\mathbb{Z}$.

2.17. Решите уравнение: $2\sin^2 x+\cos 4x=0$.

***Решение*:**

Если тригонометрическое уравнение содержит $\sin x$ или $\cos x$ в четной степени, то можно применить формулы понижения степени:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},\quad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

$$2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+\cos 4x=0$$

$1+\cos 4x-\cos 2x=0$

$2\cos^2 2x-\cos 2x=0$

$\cos 2x(2\cos 2x-1)=0$

1) $\cos 2x=0$

$2x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\quad n\in\mathbb{Z}$

2) $\cos 2x=\frac{1}{2}$

$2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$

$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(1+2n),\quad x=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1),\quad n,k\in\mathbb{Z}$.

2.18. Решите уравнение: $2\sin^2 x-2\sin^2 2x+2\sin^2 3x=1$.

Решение:

Применим формулу понижения степени.

$$2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}-2\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}+2\cdot\frac{1-\cos 6x}{2}=1$$

$1-\cos 2x-(1-\cos 4x)+1-\cos 6x=1$

$\cos 4x-\cos 2x-\cos 6x=0$

$\cos 4x-2\cos 4x\cdot\cos 2x=0$

$\cos 4x(1-2\cos 2x)=0$

1) $\cos 4x=0$

$4x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\quad n\in\mathbb{Z}$

2) $\cos 2x=\frac{1}{2}$

$2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$

$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$

Ответ: $x=\frac{\pi}{8}(1+2n),\quad x=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1),\quad n,k\in\mathbb{Z}$.

2.19. Найдите число решений уравнения $2\cos^2 x - \sin x - 2 = 0$, принадлежащих отрезку $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение:

$$2\left(1-\sin^2 x\right) - \sin x - 2 = 0$$

$$-2\sin^2 x - \sin = 0$$

$$\sin x\left(2\sin x + 1\right) = 0$$

1) $\sin x = 0$

$x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$n = 0;\quad x = 0 \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$

$n = 1;\quad x = \pi \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$

$n = 2;\quad x = 2\pi \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$

При других значениях n корни уравнения не попадают в заданный промежуток

2) $\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = \left(-1\right)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$,

$k \in \mathbb{Z}$

$k = 0;\quad x = -\frac{\pi}{6} \notin \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$

$k = 1;\quad x = \frac{7\pi}{6} \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$

$k = 2;\quad x = \frac{11\pi}{6} \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$

$k = 3;\quad x = \frac{19\pi}{6} \notin \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$

Число решений уравнения равно 5.

Ответ: 5.

Метод введения новой переменной

Данный способ решения тригонометрического уравнения заключается в следующем: исходное уравнение приводится к алгебраическому относительно тригонометрической функции одного аргумента; затем решается полученное алгебраическое уравнение, что приводит к нескольким простейшим тригонометрическим уравнениям, из которых находят значения неизвестного.

Часто перед введением новой переменной приходится делать некоторые тождественные преобразования. Если в уравнение входят тригонометрические функции одного аргумента, то надо выразить эти

функции через одну из них, например, через $\sin x$, а потом заменой $\sin x = a$ свести исходное уравнение к алгебраическому.

Рассмотрим тригонометрические уравнения, приводящиеся к квадратным.

2.20. Решите уравнение: $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$.

Решение:

$$2\left(1-\sin^2 x\right) + 5\sin x - 4 = 0$$

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$

Замена: $a = \sin x$

$$2a^2 - 5a + 2 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2},\ \ a_2 = 2$$

1) $\sin x = \frac{1}{2}$

$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$

2) $\sin x = 2$

уравнение решений не имеет, так как $|\sin x| \le 1$

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$.

2.21. Решите уравнение: $\cos^4 x + 3\sin x - \sin^4 x = 2$.

Решение:

$$\left(1-\sin^2 x\right)^2 + 3\sin x - \sin^4 x - 2 = 0$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

Замена: $a = \sin x$

$$2a^2 - 3a + 1 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2},\ \ a_2 = 1$$

1) $\sin x = \frac{1}{2}$

$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$

2) $\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ n,k\in\mathbb{Z}$.

2.22. Решите уравнение: $3\operatorname{tg}^2x-8\cos^2x+1=0$.

Решение:

Обозначим $a=\operatorname{tg}^2x$, тогда $\cos^2x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2x}=\frac{1}{1+a}$.

$3a-\frac{8}{1+a}+1=0$

$3a^2+4a-7=0$

$a_1=1,\quad a_2=-\frac{7}{3}$ - посторонний корень, так как $a\geq 0$

$\operatorname{tg}^2x=1$

$\operatorname{tg}x=\pm 1$

$x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

В некоторых случаях тригонометрические уравнения можно свести к алгебраическим относительно $\operatorname{tg}x$. Примерами таких уравнений могут служить однородные уравнения.

1. Уравнение вида:

$$a\cdot\sin kx+b\cdot\cos kx=0\quad(a\neq 0,\ b\neq 0)$$

называется однородным уравнением первой степени относительно $\sin kx$, $\cos kx$.

Для того чтобы решить данное уравнение, разделим обе его части на $\cos kx$. При этом потери корней не происходит, т.к. если $\cos kx=0$, то из уравнения следует, что и $\sin kx=0$, что невозможно, поскольку $\sin^2kx+\cos^2kx=1$.

В результате получаем уравнение:

$$a\cdot\operatorname{tg}kx+b=0.$$

2. Уравнение вида:

$$a\cdot\sin^2 kx+b\cdot\sin kx\cdot\cos kx+c\cdot\cos^2 kx=0 \quad (a\neq 0)$$

называется однородным уравнением второй степени относительно $\sin kx$, $\cos kx$.

Разделив обе части уравнения на $\cos^2 kx$, получим равносильное уравнение:

$$a\cdot\operatorname{tg}^2 kx+b\cdot\operatorname{tg} kx+c=0.$$

Рассмотрим примеры однородных тригонометрических уравнений.

2.23. Решите уравнение: $2\sin 3x-5\cos 3x=0$.

Решение:

$2\sin 3x-5\cos 3x=0 \quad \big| : \ \cos 3x\neq 0$

$2\operatorname{tg} 3x-5=0$

$\operatorname{tg} 3x=\frac{5}{2}$

$3x=\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+\frac{\pi n}{3}, \quad n\in\mathbb{Z}$

Ответ: $x=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+\frac{\pi n}{3}, \quad n\in\mathbb{Z}$.

2.24. Решите уравнение: $\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x-3\cos^2 x=0$.

Решение:

$\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x-3\cos^2 x=0 \quad \big| : \ \cos^2 x\neq 0$

$\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x-3=0$

Замена: $a=\operatorname{tg} x$

$a^2+2a-3=0$

$a_1=-3, \quad a_2=1$

1) $\operatorname{tg} x = 1$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

2) $\operatorname{tg} x = -3$

$x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k,$
$k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}$.

2.25. Решите уравнение: $2\sin^2 x + 6 = 13\sin 2x$.

Решение:

$$2\sin^2 x + 6\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 13 \cdot 2\sin x \cdot \cos x$$

$$4\sin^2 x - 13\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0 \quad \Big| : \cos^2 x \neq 0$$

$$4\operatorname{tg}^2 x - 13\operatorname{tg} x + 3 = 0$$

Замена: $a = \operatorname{tg} x$

$4a^2 - 13a + 3 = 0$	$a^2 - 13a + 12 = 0$
$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 = 3$	$a_1 = 1, \quad a_2 = 12$

1) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{4}$

$x = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

2) $\operatorname{tg} x = 3$

$x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \pi n, \quad x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}$.

Метод введения вспомогательного угла

Суть данного метода в том, что некоторую величину представляют как тригонометрическую функцию соответствующего аргумента φ, а затем проводят тригонометрические преобразования.

Поясним метод на примерах.

2.26. Решите уравнение: $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$.

Решение:

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=1 \quad \Big| : 2$$

$$\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x=\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$x+\frac{\pi}{3}=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}$$

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}$.

2.27. Решите уравнение: $3\cos x+4\sin x=5$.

Решение:

Так как $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$, разделим уравнение на 5:

$$\frac{3}{5}\cos x+\frac{4}{5}\sin x=1$$

Обозначим: $\sin\varphi=\frac{3}{5}$, тогда $\cos\varphi=\frac{4}{5}$ и $\varphi=\arcsin\frac{3}{5}$

$$\sin\varphi\cdot\cos x+\cos\varphi\cdot\sin x=1$$

$$\sin(\varphi+x)=1$$

$$\varphi+x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{\pi}{2}-\varphi+2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{3}{5}+2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{3}{5}+2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}$.

Рассмотренный способ часто применяется для нахождения максимума и минимума функций вида $y = a\cdot\sin x + b\cdot\cos x + c$.

2.28. Найдите максимум и минимум функции:

$y = 5\sin x + 12\cos x - 7$.

Решение:

$$y = \sqrt{5^2+12^2}\left(\frac{5}{\sqrt{5^2+12^2}}\sin x + \frac{12}{\sqrt{5^2+12^2}}\cos x\right) - 7$$

$$y = 13\left(\frac{5}{13}\sin x + \frac{12}{13}\cos x\right) - 7$$

Обозначим $\cos\varphi = \frac{5}{13}$, тогда $\sin\varphi = \frac{12}{13}$ и $\varphi = \arcsin\frac{12}{13}$.

$$y = 13(\cos\varphi\cdot\sin x + \sin\varphi\cdot\cos x) - 7$$

$$y = 13\sin(x+\varphi) - 7$$

Максимум исходная функция будет достигать при $\sin(x+\varphi) = 1$, то есть $y_{max} = 13 - 7 = 6$.

Минимум исходная функция будет достигать при $\sin(x+\varphi) = -1$, то есть $y_{min} = -13 - 7 = -20$.

Ответ: $y_{max} = 6$, $y_{min} = -20$.

Рассмотренный способ решения уравнения вида $a\cdot\sin x + b\cdot\cos x = c$ является универсальным. Он также применяется в физике при сложении гармонических колебаний.

Решение уравнений с использованием ограниченности функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

2.29. Решите уравнение: $\sin^2 5x + 1 = \cos^2 3x$.

Решение:

$$\sin^2 5x + 1 - \cos^2 3x = 0$$

$$\sin^2 5x + \sin^2 3x = 0$$

Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\sin 5x=0\\ \sin 3x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5x=\pi n, & n\in\mathbb{Z}\\ 3x=\pi k, & k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi n}{5}, & n\in\mathbb{Z}\\ x=\dfrac{\pi k}{3}, & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Приравнивая правые части двух последних равенств, получаем уравнение:

$$\frac{\pi n}{5}=\frac{\pi k}{3}.$$

То есть $3n=5k$; $n,k\in\mathbb{Z}$. Это уравнение имеет решение:

$$\begin{cases}n=5l\\ k=3l, & l\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Подставляя значения k или n в решение исходного уравнения, получаем:

$$x=\frac{\pi\cdot 5l}{5}=\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $x=\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$.

2.30. Решите уравнение: $\sin 4x-\cos x=2$.

Решение:

Так как $|\cos x|\le 1$, $|\sin 4x|\le 1$, исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\sin 4x=1\\ \cos x=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}, & n\in\mathbb{Z}\\ x=\pi+2\pi k, & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Выберем общие решения:

$$\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}=\pi+2\pi k$$

$$\frac{1}{8}+\frac{n}{2}=1+2k$$

$$\frac{4n-7}{8}=2k \Rightarrow \frac{4n-7}{16}=k$$

В числителе дроби $\frac{4n-7}{16}$ стоит нечетное число, а в знаменателе – четное. Такая дробь не может принимать целые значения, а $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, исходное уравнение решений не имеет.

Ответ: нет решений.

Приведенные типы уравнений и методы их решений, конечно, не исчерпывают все разнообразие тригонометрических уравнений.

Решение уравнений с обратными тригонометрическими функциями

Уравнения вида $f(\arcsin x) = 0$, $f(\arccos x) = 0$ и т.п. решаются методом введения новой переменной.

2.31. Решите уравнение: $2\arcsin^2 x - 7\arcsin x + 3 = 0$.

Решение:

Замена: $a = \arcsin x$

$$2a^2 - 7a + 3 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$a_2 = 3$ - не удовлетворяет условию, так как $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$

$$\arcsin x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \sin\frac{1}{2}$$

Ответ: $x = \sin\frac{1}{2}$.

2.32. Решите уравнение: $\operatorname{arctg}(x^2 - 3x - 3) = \frac{\pi}{4}$.

Решение:

Замена: $a = x^2 - 3x - 3$

$$\operatorname{arctg} a = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad a = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

$$x^2 - 3x - 3 = 1$$

$x^2-3x-4=0$

$x_1=-1$, $x_2=4$

Ответ: $\{-1;\ 4\}$.

2.33. Решите уравнение: $6\arcsin\left(x^2-6x+8,5\right)=\pi$.

Решение:

$\arcsin\left(x^2-6x+8,5\right)=\frac{\pi}{6}$

Замена: $a=x^2-6x+8,5$

$\arcsin a=\frac{\pi}{6} \Rightarrow a=\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

$x^2-6x+8,5=0,5$

$x^2-6x+8=0$

$x_1=2$, $x_2=4$

Ответ: $\{2;\ 4\}$.

2.34. Решите уравнение: $\operatorname{arctg}(1+x)+\operatorname{arctg}(1-x)=\frac{\pi}{4}$.

Решение:

Замена:

$\operatorname{arctg}(1+x)=\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{arctg}(1-x)=\beta$

$\operatorname{tg}\alpha=1+x$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\beta=1-x$

$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$

По условию: $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

Взяв тангенс от обеих частей уравнения, получим следующее следствие из него:

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=1$$

$$\frac{1+x+1-x}{1-(1+x)(1-x)}=1$$

$$\frac{2}{x^2}=1 \quad\Rightarrow\quad x^2=2 \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{2}$$

Проверка:

1) $x=\sqrt{2}$.

При проверке данного корня потребуется доказать или опровергнуть равенство:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(1+\sqrt{2}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(1-\sqrt{2}\right)=\frac{\pi}{4}$$

Замена:

$\operatorname{arc\,tg}\left(1+\sqrt{2}\right)=\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{arc\,tg}\left(1-\sqrt{2}\right)=\beta$

$\operatorname{tg}\alpha=1+\sqrt{2}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\beta=1-\sqrt{2}$

$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $-\frac{\pi}{4}<\beta<0$

Значит, $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}}{1-\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{2}{1-(1-2)}=1$$

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ **- верно**

2) $x=-\sqrt{2}$

$\operatorname{arc\,tg}\left(1-\sqrt{2}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(1+\sqrt{2}\right)=\frac{\pi}{4}$ **- верно**

Два корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $x=\pm\sqrt{2}$.

2.35. Решите уравнение: $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x}$.

Решение:

Замена:

$\arcsin x = \alpha$

$\sin\alpha = x$

$-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

$\arccos\sqrt{1-x} = \beta$

$\cos\beta = \sqrt{1-x}$

$0 \le \beta \le \pi$

$\sin\beta > 0$

$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-(1-x)} = \sqrt{x}$

По условию: $\alpha = \beta$

Значит, α и β – углы I четверти.

Взяв синус от обеих частей уравнения, получим:

$\sin\alpha = \sin\beta$

$x = \sqrt{x}$, $x \ge 0$

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$

Проверка:

1) $x = 0$

$\arcsin 0 = \arccos 1$

$0° = 0°$ - верно

2) $x = 1$

$\arcsin 1 = \arccos 0$

$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ - верно

Ответ: $\{0;\ 1\}$.

2.36. Решите уравнение: $\sin(5\,\mathrm{arcctg}\,x) = 1$.

Решение:

Замена: $\mathrm{arcctg}\,x = a$. Тогда $\mathrm{ctg}\,a = x$ и $0 < a < \pi$.

$\sin 5a = 1$

$$5a=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in Z$$

$$a=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5},\quad n\in Z$$

Поскольку $0<a<\pi$, то в последнем равенстве n может принимать лишь значения 0, 1, 2. Тогда найдем соответственно:

$$a=\frac{\pi}{10};\quad \operatorname{arcctg}x=\frac{\pi}{10}\quad\Rightarrow\quad x=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}$$

$$a=\frac{\pi}{2};\quad \operatorname{arcctg}x=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad x=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=0$$

$$a=\frac{9\pi}{10};\quad \operatorname{arcctg}x=\frac{9\pi}{10}\quad\Rightarrow\quad x=\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{10}=\operatorname{ctg}\left(\pi-\frac{\pi}{10}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}$$

Ответ: $\left\{-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{10}\right);\ 0;\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{10}\right)\right\}$.

§3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Решение тригонометрических неравенств, по сравнению с другими типами неравенств, существенно отличается.

Решение тригонометрического неравенства можно свести к решению нескольких простейших тригонометрических неравенств следующими методами:

- применение основных тригонометрических формул;
- введение новой переменной.

При решении тригонометрических неравенств также можно использовать метод интервалов.

Решение простейших тригонометрических неравенств

Чтобы хорошо овладеть методикой решения тригонометрических неравенств, нужно сначала научиться записывать решения простейших неравенств, таких как:

$\sin x \vee a$, где $|a| \leq 1$

$\cos x \vee a$, где $|a| \leq 1$

$\operatorname{tg} x \vee a$

$\operatorname{ctg} x \vee a$

Для решения простейших тригонометрических неравенств обычно используют интерпретацию неравенства на графике функции или на единичной окружности.

3.1. Решите неравенство: $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

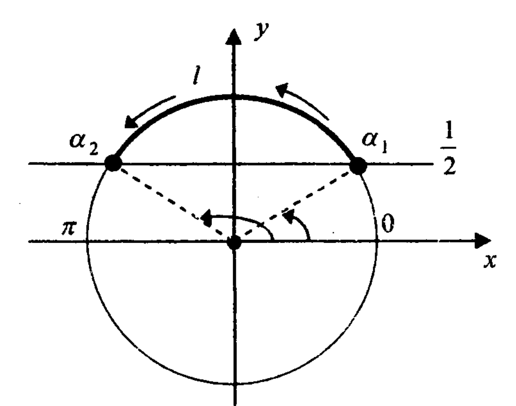
Решение:

Множество точек, ордината которых больше или равна $\frac{1}{2}$ - дуга l, выделенная на рисунке.

$\alpha_1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\alpha_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$\alpha_1 < \alpha_2$



Следовательно, решением неравенства будут все значения на $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ с периодом $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

То есть $\frac{\pi}{6} + 2\pi k \le x \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.2. Решите неравенство: $\cos\frac{x}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение:

Обозначив $\frac{x}{3} = t$, получим $\cos t < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

На рисунке выделена соответствующая дуга l (концы дуги не входят в рассматриваемое множество).

$\alpha_1 = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\alpha_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$\alpha_1 < \alpha_2$

$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Перейдем к переменной x:

$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < \frac{x}{3} < \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{2} + 6\pi k < x < \frac{11\pi}{2} + 6\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

О т в е т: $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 6\pi k;\ \frac{11\pi}{2} + 6\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.3. Решите неравенство: $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) - 1 \geq 0$.

Решение:

$\mathrm{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$

Пусть $\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} = t$, тогда $\mathrm{tg}\, t \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Проведем линию тангенсов, которая является касательной к окружности в точке $(1; 0)$.

Период тангенса равен π. Поэтому решения находим на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Точки, тангенс которых больше $\frac{1}{\sqrt{3}}$, принадлежат лучу AT.

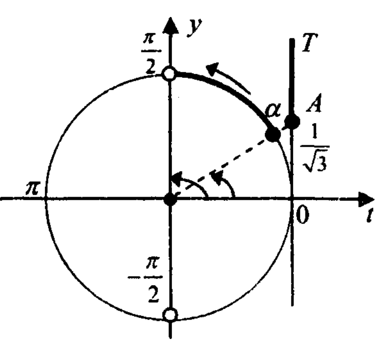
Значит, $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

$\frac{\pi}{6} + \pi k \le t < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{6} + \pi k \le \frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\pi k \le \frac{x}{3} < \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$3\pi k \le x < \pi + 3\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$



Ответ: $x \in [3\pi k;\ \pi + 3\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.4. Решите неравенство: $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \ge -1$.

Решение:

$-\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \ge -1$

$\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{1}{\sqrt{3}}$

Обозначим $x - \frac{\pi}{4} = t$ и решим неравенство $\operatorname{ctg} t \le \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Проведем линию котангенсов, которая является касательной к окружности в точке $(0;1)$.

Период котангенса равен π. Поэтому решения находим на промежутке $(0;\pi)$.

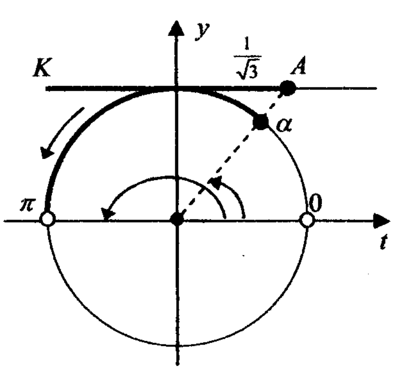
Точки, котангенс которых меньше $\frac{1}{\sqrt{3}}$, принадлежат лучу AK.

$\alpha = \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{3}$

$\dfrac{\pi}{3} + \pi k \le t < \pi + \pi k\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$

$\dfrac{\pi}{3} + \pi k \le x - \dfrac{\pi}{4} < \pi + \pi k\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$

$\dfrac{7\pi}{12} + \pi k \le x < \dfrac{5\pi}{4} + \pi k\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$



Ответ: $x \in \left[\dfrac{7\pi}{12} + \pi k;\ \dfrac{5\pi}{4} + \pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$.

3.5. Решите неравенство: $-\dfrac{1}{2} \le \sin x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение:

Выделяем точки, ординаты которых больше $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, но меньше $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\alpha_1 = \arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$

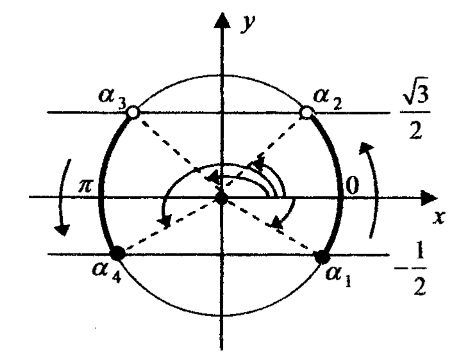
$\alpha_2 = \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

$\alpha_1 < \alpha_2$

$\alpha_3 = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$

$\alpha_4 = \pi + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6}$

$\alpha_3 < \alpha_4$



Первое решение: $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \le x < \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Второе решение: $\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n < x \le \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n\,,\ \ n \in \mathbb{Z}$.

В ответе объединяем оба промежутка.

Ответ: $x \in \left[-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right],\ \ k, n \in \mathbb{Z}$.

3.6. Решите неравенство: $|\cos x| \le \frac{1}{2}$.

Решение:

$$-\frac{1}{2} \le \cos x \le \frac{1}{2}$$

Выделяем точки, абсциссы которых больше $\left(-\frac{1}{2}\right)$, но меньше $\frac{1}{2}$.

$$\alpha_1 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\alpha_2 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\alpha_1 < \alpha_2$$

$$x \in \left[\frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3}\right]$$

Если дуги симметричны относительно осей координат, то ответ можно записать на любой дуге, уменьшив период в 2 раза.

$$\frac{\pi}{3}+\pi k \le x \le \frac{2\pi}{3}+\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x \in \left[\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+\pi k\right],\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Метод сведения тригонометрического неравенства к простейшим путем применения основных тригонометрических формул

В большинстве случаев решение тригонометрического неравенства можно свести при помощи тождественных тригонометрических преобразований и введения новой переменной к решению одного или нескольких простейших неравенств.

3.7. Решите неравенство: $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{2}\right) - 1 \le 0$.

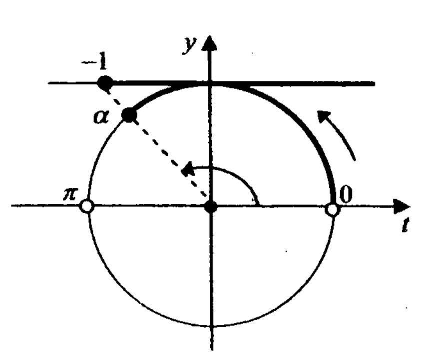
Решение:

Применяя формулы приведения, получим:

$$-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\le 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\ge -1$$

Замена: $\frac{x}{2}=t$.

$\operatorname{ctg} t\ge -1$



$$\alpha=\operatorname{arcctg}(-1)=\pi-\operatorname{arcctg}1=\frac{3\pi}{4}$$

$$0+\pi k<t\le\frac{3\pi}{4}+\pi k\,,\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\pi k<\frac{x}{2}\le\frac{3\pi}{4}+\pi k\,,\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$2\pi k<x\le\frac{3\pi}{2}+2\pi k\,,\quad k\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $x\in\left(2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right],\ k\in\mathbb{Z}$.

3.8. Решите неравенство: $\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos x-\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{6}<-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение:

Левую часть неравенства преобразуем по формуле косинуса суммы двух аргументов:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)<-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Замена: $\frac{\pi}{6}+x=t$

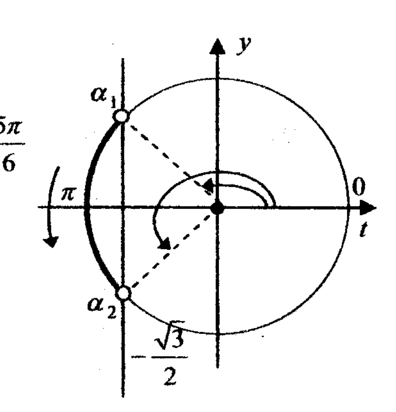
$$\cos t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha_1 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\alpha_2 = 2\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

$$\alpha_1 < \alpha_2$$

$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$



$$\frac{5\pi}{6}+2\pi k<\frac{\pi}{6}+x<\frac{7\pi}{6}+2\pi k\,,\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{2\pi}{3}+2\pi k<x<\pi+2\pi k\,,\quad k\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $x\in\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ \pi+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}$.

3.9. Решите неравенство: $\left(\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)^2\le\frac{1}{2}$.

Решение:

Раскроем квадрат суммы двух выражений и воспользуемся формулами:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\ .$$

$$\sin^2\frac{x}{4}+2\sin\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{4}+\cos^2\frac{x}{4}\le\frac{1}{2}$$

$$1+\sin\frac{x}{2}\le\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\sin\frac{x}{2}\le-\frac{1}{2}$$

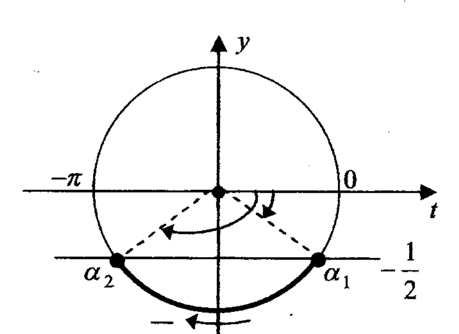
Замена: $\frac{x}{2}=t$.

$$\sin t\le-\frac{1}{2}$$

$$\alpha_1=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$$

$$\alpha_2=-\pi+\frac{\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}$$

$$\alpha_2<\alpha_1$$



$$-\frac{5\pi}{6}+2\pi k\le t\le-\frac{\pi}{6}+2\pi k\,,\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$-\frac{5\pi}{6}+2\pi k\le\frac{x}{2}\le-\frac{\pi}{6}+2\pi k\,,\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$-\frac{5\pi}{3}+4\pi k \le x \le -\frac{\pi}{3}+4\pi k\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x \in \left[-\frac{5\pi}{3}+4\pi k;\ -\frac{\pi}{3}+4\pi k\right],\ k \in \mathbb{Z}$.

3.10. Решите неравенство: $\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right) \ge -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

***Решение*:**

Преобразуем левую часть неравенства по формуле:

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

$$\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-4x\right) \ge -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$-\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right) \ge -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right) \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

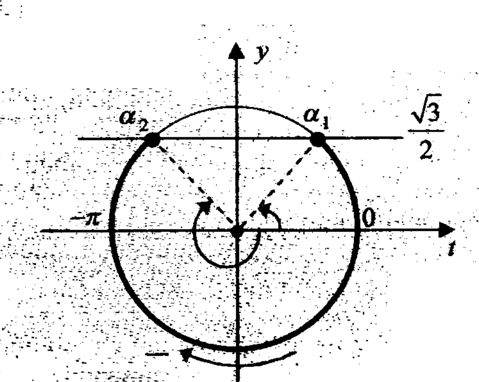
Замена: $4x-\frac{2\pi}{3}=t$

$$\sin t \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha_1 = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\alpha_2 = -\pi-\frac{\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$$

$$\alpha_2 < \alpha_1$$



$$-\frac{4\pi}{3}+2\pi k \le t \le \frac{\pi}{3}+2\pi k\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{4\pi}{3}+2\pi k \le 4x-\frac{2\pi}{3} \le \frac{\pi}{3}+2\pi k\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi k \le 4x \le \pi+2\pi k\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

$-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\le x\le\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$

Ответ: $x\in\left[-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2};\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.

3.11. Решите неравенство: $3-4\cos^2 x<0$.

Решение:

Используя формулу понижения степени $2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$, получим:

$3-2(1+\cos 2x)<0$

$1-2\cos 2x<0$

$2\cos 2x>1$

$\cos 2x>\frac{1}{2}$

Замена: $2x=t$.

$\cos t>\frac{1}{2}$

$\alpha_1=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$

$\alpha_2=-\arccos\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{3}$

$\alpha_2<\alpha_1$

$-\frac{\pi}{3}+2\pi k<t<\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$

$-\frac{\pi}{3}+2\pi k<2x<\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$

$-\frac{\pi}{6}+\pi k<x<\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$

Ответ: $x\in\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \frac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

3.12. Решите неравенство: $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) < 1$.

Решение:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x < \frac{1}{2}$$

Введем вспомогательный угол, используя табличные значения:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}, \quad \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\sin 2x \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \cos 2x \cdot \sin\frac{\pi}{6} < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$$

Замена: $2x + \frac{\pi}{6} = t$

$$\sin t < \frac{1}{2}$$

$$\alpha_1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\alpha_2 = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$$

$$\alpha_2 < \alpha_1$$

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < 2x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{4\pi}{3} + 2\pi k < 2x < 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{2\pi}{3} + \pi k < x < \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{2\pi}{3} + \pi k;\ \pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Введением вспомогательного угла мы также могли получить неравенство:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}$$

Его решение будет $\left(\frac{\pi}{3} + \pi k;\ \pi + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Это вторая форма записи того же множества решений.

3.13. Решите неравенство: $\sin x > \cos x$.

В ответе укажите сумму натуральных чисел, меньших 10, удовлетворяющих этому неравенству.

Решение:

$\sin x - \cos x > 0$

Замечание. Если для решения подобных уравнений один из основных приемов – деление на любое из выражений $\sin x$ или $\cos x$, то в неравенствах так поступать нельзя, в силу того, что неизвестен знак делителя; либо придется рассмотреть два возможных случая.

Решим данное неравенство методом введения вспомогательного угла.

Разделим неравенство на $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x > 0$$

$$\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x > 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

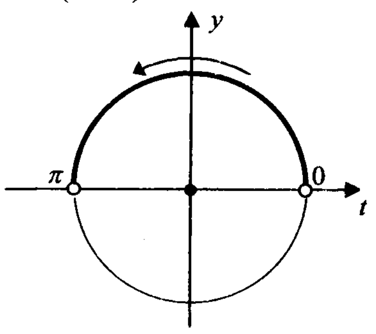
Замена: $x - \frac{\pi}{4} = t$

$\sin t > 0$

$2\pi k < t < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$2\pi k < x - \frac{\pi}{4} < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$



При $k=0$; $\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4}\right)$, где $\frac{\pi}{4}\approx 0,785$, $\frac{5\pi}{4}\approx 3,925$

При $k=1$; $\left(\frac{9\pi}{4};\ \frac{13\pi}{4}\right)$, где $\frac{9\pi}{4}\approx 7,065$, $\frac{13\pi}{4}\approx 10,205$

Натуральные числа, меньшие 10, принадлежащие этим решениям: 1, 2, 3, 8, 9.

Ответ: $\sum = 23$.

Метод сведения тригонометрического неравенства к простейшим путем введения новой переменной

3.14. Решите неравенство: $\cos 2x + 3\sin x \ge -1$.

Решение:

$1-2\sin^2 x+3\sin x+1\ge 0$

$2\sin^2 x-3\sin x-2\le 0$

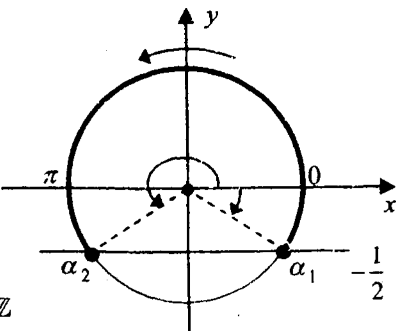
Замена: $\sin x = t$

$2t^2-3t-2\le 0 \quad\Rightarrow\quad 2\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-2)\le 0 \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{2}\le t\le 2$

$-\frac{1}{2}\le \sin x\le 2$

Правая часть неравенства выполняется для любого значения x.

Решим $\sin x \ge -\frac{1}{2}$



$\alpha_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

$\alpha_2 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

$\alpha_1 < \alpha_2$

$-\frac{\pi}{6}+2\pi k\le x\le \frac{7\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$

Ответ: $x\in\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.

3.15. Решите неравенство: $\frac{1}{\sin^2 x}+\operatorname{ctg} x-3<0$.

Решение:

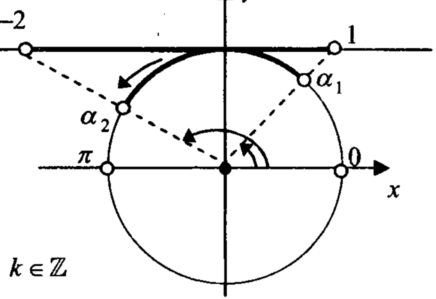
$1+\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg} x-3<0$

$\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg} x-2<0$

Замена: $\operatorname{ctg} x=t$

$t^2+t-2<0 \quad \Rightarrow \quad (t+2)(t-1)<0 \quad \Rightarrow \quad -2<t<1$

$-2<\operatorname{ctg} x<1$



$\alpha_1=\operatorname{arcctg} 1=\frac{\pi}{4}$

$\alpha_2=\operatorname{arcctg}(-2)=\pi-\operatorname{arcctg} 2$

$\alpha_1<\alpha_2$

$\frac{\pi}{4}+\pi k<x<\pi-\operatorname{arcctg} 2+\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}$

Ответ: $x\in\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \pi-\operatorname{arcctg} 2+\pi k\right), \quad k\in\mathbb{Z}$.

3.16. Решите неравенство: $\frac{15}{\cos x+1}<11-2\cos x$.

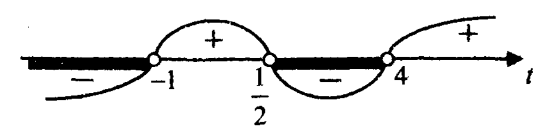
Решение:

Замена: $\cos x=t$

$\frac{15}{t+1}<11-2t$

$\frac{2t^2-9t+4}{t+1}<0$

$\frac{2\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-4)}{t+1}<0$



$t < -1$ или $\frac{1}{2} < t < 4$

1) $t < -1$

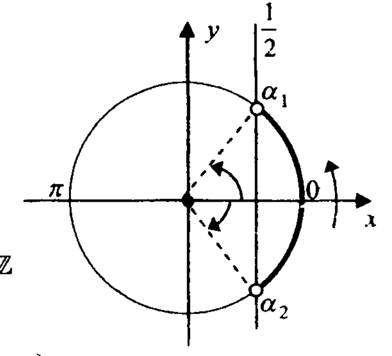
$\cos x < -1$

решений нет

2) $\frac{1}{2} < t < 4$

$\frac{1}{2} < \cos x < 4$

$\cos x > \frac{1}{2}$



$\alpha_1 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

$\alpha_2 = -\arccos\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}$

$\alpha_2 < \alpha_1$

$-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Неравенства вида $R\left(\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ \sin x \cdot \cos x\right) \vee 0$, где R - рациональная функция, называются однородными неравенствами второй степени относительно $\sin x$ и $\cos x$. Почленным делением на $\cos^2 x$ или $\sin^2 x$ такие неравенства приводятся к квадратным относительно $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$.

3.17. Решите неравенство: $\sin^2 x + \sin 2x - 3\cos^2 x > 0$.

Решение:

Будем решать неравенство почленным делением на $\cos^2 x$.

Разобьем решение на два случая: $\cos^2 x > 0$ и $\cos^2 x = 0$

1) $\cos^2 x > 0$

$\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x > 0 \quad \Big| \; : \; \cos^2 x > 0$

$\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 > 0$

Замена: $\operatorname{tg} x = t$

$t^2 + 2t - 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad (t+3)(t-1) > 0$

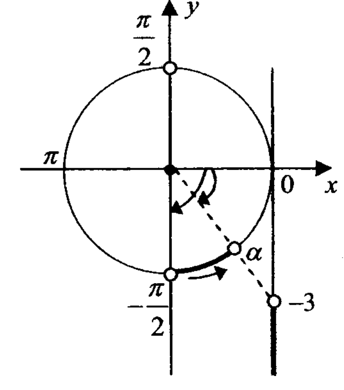
$t < -3$ или $t > 1$

1) $t < -3$

$\operatorname{tg} x < -3$

$\alpha = \operatorname{arc\,tg}(-3) = -\operatorname{arc\,tg} 3$

$-\dfrac{\pi}{2} + \pi k < x < -\operatorname{arc\,tg} 3 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

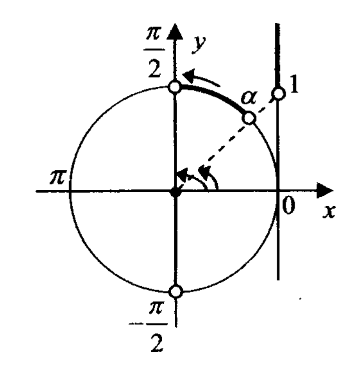


2) $t > 1$

$\operatorname{tg} x > 1$

$\alpha = \operatorname{arc\,tg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{\pi}{4} + \pi n < x < \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$



2) Рассмотрим случай $\cos^2 x = 0$

Тогда $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1$, а $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = 0$.

Подставим эти значения в исходное неравенство:

$1 + 0 - 3 \cdot 0 > 0$ - верно

Значит, случай $\cos^2 x = 0$ удовлетворяет исходному неравенству и включается в ответ.

Ответ: $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2} + \pi k; \; -\operatorname{arc\,tg} 3 + \pi k \right) \cup \left(\dfrac{\pi}{4} + \pi n; \; \dfrac{\pi}{2} + \pi n \right], \; k, n \in \mathbb{Z}$.

3.18. Решите неравенство: $3\sin 2x + 8\cos^2 x \geq 7$.

Решение:

$6\sin x \cdot \cos x + 8\cos^2 x \geq 7\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)$

Будем решать неравенство почленным делением на $\sin^2 x$.

Разобьем решение на два случая: $\sin^2 x > 0$ и $\sin^2 x = 0$.

1) $\sin^2 x > 0$

$\cos^2 x + 6\sin x \cdot \cos x - 7\sin^2 x \geq 0 \quad \Big| \ : \ \sin^2 x > 0$

$\operatorname{ctg}^2 x + 6\operatorname{ctg} x - 7 \geq 0$

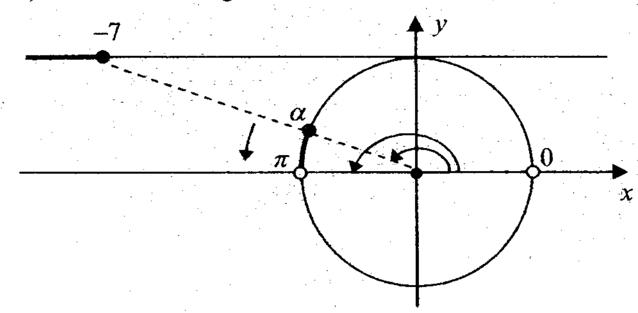
Замена: $\operatorname{ctg} x = t$

$t^2 + 6t - 7 \geq 0$

$(t+7)(t-1) \geq 0$

$t \leq -7$ или $t \geq 1$

а) $t \leq -7 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{ctg} x \leq -7$



$\alpha = \operatorname{arcctg}(-7) = \pi - \operatorname{arcctg} 7$

$\pi - \operatorname{arcctg} 7 + \pi k \leq x < \pi + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

б) $t \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{ctg} x \geq 1$

$\alpha = \operatorname{arcctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$

$\pi n < x \leq \dfrac{\pi}{4} + \pi n \,, \quad n \in \mathbb{Z}$

2) Рассмотрим случай $\sin^2 x = 0$

Тогда $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = 0$, а $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1$.

Подставим эти значения в исходное неравенство:

$3 \cdot 0 + 8 > 7$ - верно

Значит, случай $\sin^2 x = 0$ удовлетворяет исходному неравенству и включается в ответ.

Ответ: $x \in [\pi - \operatorname{arcctg} 7 + \pi k;\ \pi + \pi k] \cup \left[\pi n;\ \dfrac{\pi}{4} + \pi n\right]$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Неравенства вида $R(\operatorname{tg} x,\ \sin 2x,\ \cos 2x) \vee 0$, где R - рациональная функция, с помощью формул универсальной тригонометрической подстановки:

$$\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \qquad \cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

приводятся к рациональным относительно $\operatorname{tg} x$.

3.19. Решите неравенство: $2\cos 2x + \sin 2x > \operatorname{tg} x$.

Решение:

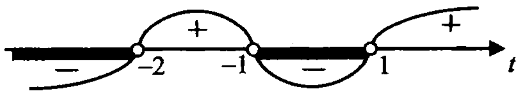
$$2 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} > \operatorname{tg} x$$

Замена: $\operatorname{tg} x = t$

$$2 \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + \frac{2t}{1 + t^2} > t$$

$$\frac{t^3+2t^2-t-2}{t^2+1}<0$$

$$\frac{t^2(t+2)-(t+2)}{t^2+1}<0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(t+2)(t-1)(t+1)}{t^2+1}<0$$



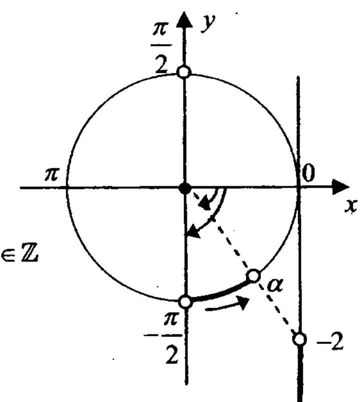
$t<-2$ или $-1<t<1$

1) $t<-2$

$\operatorname{tg} x<-2$

$\alpha=\operatorname{arctg}(-2)=-\operatorname{arctg} 2$

$-\frac{\pi}{2}+\pi k<x<-\operatorname{arctg} 2+\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$



2) $-1<t<1$

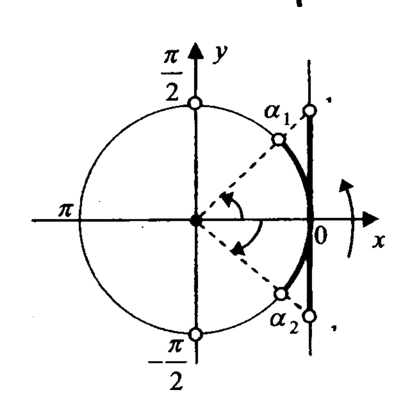
$-1<\operatorname{tg} x<1$

$\alpha_1=\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}$

$\alpha_2=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$

$\alpha_2<\alpha_1$

$-\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{\pi}{4}+\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$



Ответ: $x \in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ -\operatorname{arctg} 2+\pi k\right) \cup\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right), \quad k, n \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим алгоритм решения тригонометрического неравенства методом интервалов:

1. Приведите неравенство к виду, в котором в одной его части стоит нуль, а другая его часть (например, левая) представлена в виде произведения.

2. Определите нули и точки разрыва функции, стоящей в левой части неравенства.

3. Расставьте на единичной окружности все найденные значения.

4. Определите знак выражения, стоящего в левой части, на любом из полученных промежутков. Для этого:

а) возьмите произвольное число φ из данного интервала и не совпадающее ни с одним из ранее полученных чисел;

б) подставьте число φ в левую часть неравенства и определите знак получившегося выражения.

5. Поставьте на этом интервале контрольную точку X следующим образом:

- если выражение получилось больше нуля, то X ставится вне окружности;
- если выражение получилось меньше нуля, то X ставится внутри окружности.

В приведенных ниже примерах точка X обозначена звездочкой $\star$.

6. Начиная с точки X, проведите плавную линию так, чтобы она проходила через все отмеченные точки последовательно в порядке обхода единичной окружности против часовой стрелки. Пройдя все точки, линия должна вернуться в точку X.

7. Если серии решений дают кратные корни, то надо помнить, что корень четной кратности не меняет знака выражения, поэтому точка четной кратности не дает возможность волнообразной линии, идущей от точки X, перейти в иную область.

8. Определите нужные участки конфигурации, которую образовала проведенная линия. Для этого:

а) если выражение, стоящее в левой части неравенства, больше нуля, то выбираем участки фигуры, лежащие вне окружности;

б) если выражение, стоящее в левой части неравенства, меньше нуля, то выбираем участки фигуры, расположенные внутри единичной окружности.

9. Отметьте стрелками в положительном направлении те дуги единичной окружности, которые принадлежат выбранным участкам.

Эти дуги соответствуют множеству решений неравенства.

3.20. Решите неравенство: $\cos x\cdot\left(0{,}5\cdot\sqrt{3}-\sin x\right)>0$.

Решение:

$$\cos x\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)<0$$

1) $\cos x=0$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$

2) $\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \quad\Rightarrow\quad \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

$k=0$	$x=\frac{\pi}{2}$	$n=-1$	$x=(-1)^{-1}\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{4\pi}{3}$
$k=1$	$x=\frac{3\pi}{2}$	$n=0$	$x=\frac{\pi}{3}$
		$n=1$	$x=(-1)\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}$
		$n=2$	$x=(-1)^2\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{7\pi}{3}\notin[0;2\pi]$

$-\frac{4\pi}{3}+2\pi=\frac{2\pi}{3}\quad\Rightarrow$ точки стали совпадать на окружности, значит, мы нашли все значения x.

Заполним теперь единичную окружность соответствующими точками.

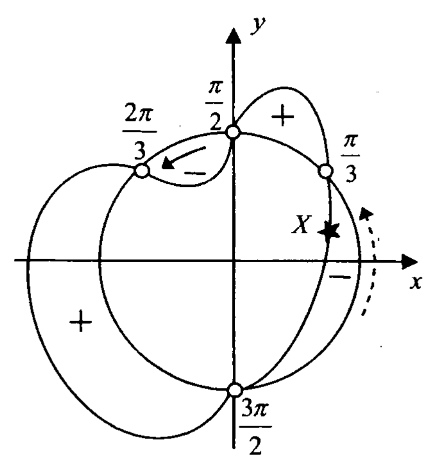
Поставим контрольную точку, положив $\varphi=0$.

Тогда $\cos 0\cdot\left(\sin 0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$.

Кривая знаков ведется изнутри окружности.

Решению исходного неравенства соответствуют дуги окружности в тех областях, которые отмечены знаком «-».

При записи окончательного ответа следует иметь в виду, что в одной из областей (она показана пунктирной стрелкой) нарушается переход от меньших значений x к большим.



В таком случае следует к меньшему значению $\frac{\pi}{3}$ прибавить 2π или от большего значения $\frac{3\pi}{2}$ отнять 2π.

Окончательное решение можно записать в виде совокупности интервалов.

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{3}+2\pi n\right),\ k, n \in \mathbb{Z}$

или $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right),\ k, n \in \mathbb{Z}$.

3.21. Решите неравенство: $\dfrac{\sin 3x \cdot \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2x} \le 0$.

Решение:

Рассмотрим совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0 \\ \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 0 \\ \sin 2x = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi k}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi n}{2} \\ x = \dfrac{\pi m}{2} \end{array}\right. \quad k,\ n,\ m \in \mathbb{Z}$$

Отметим корни на окружности:

1)

$k = 0$	$x = 0$
$k = 1$	$x = \dfrac{\pi}{3}$
$k = 2$	$x = \dfrac{2\pi}{3}$
$k = 3$	$x = \pi$
$k = 4$	$x = \dfrac{4\pi}{3}$
$k = 5$	$x = \dfrac{5\pi}{3}$

2)

$n = 0$	$x = \dfrac{\pi}{3}$
$n = 1$	$x = \dfrac{5\pi}{6}$
$n = 2$	$x = \dfrac{4\pi}{3}$
$n = 3$	$x = \dfrac{11\pi}{6}$

3)

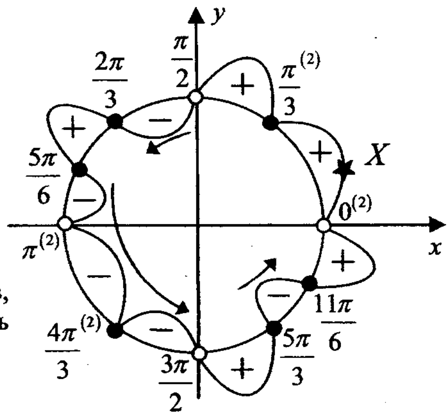
$m = 0$	$x = 0$
$m = 1$	$x = \dfrac{\pi}{2}$
$m = 2$	$x = \pi$
$m = 3$	$x = \dfrac{3\pi}{2}$

Помните, что эти точки не являются решениями неравенства!

Выберем $\varphi = \frac{\pi}{6} \in \left(0;\ \frac{\pi}{3}\right]$.

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{3}} > 0$$

Проведем кривую знаков, учитывая кратность некоторых точек.



Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right) \cup$

$\cup \left(\pi+2\pi m;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi m\right) \cup \left[\frac{5\pi}{3}+2\pi l;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi l\right] \cup \left\{\frac{\pi}{3}+2\pi t\right\}$,

$k, n, m, l, t \in \mathbb{Z}$.

3.22. Решите неравенство: $\sin 2x - \sin 3x > 0$.

Решение:

$$2\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\frac{5x}{2} > 0$$

$$\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{5x}{2} < 0$$

Введем новую переменную: $\frac{x}{2} = t$

$$\sin t\cdot\cos 5t = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin t = 0\\ \cos 5t = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}t = \pi n\\ t = \frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}\end{array}\right. \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

Найдем серии решений:

1)

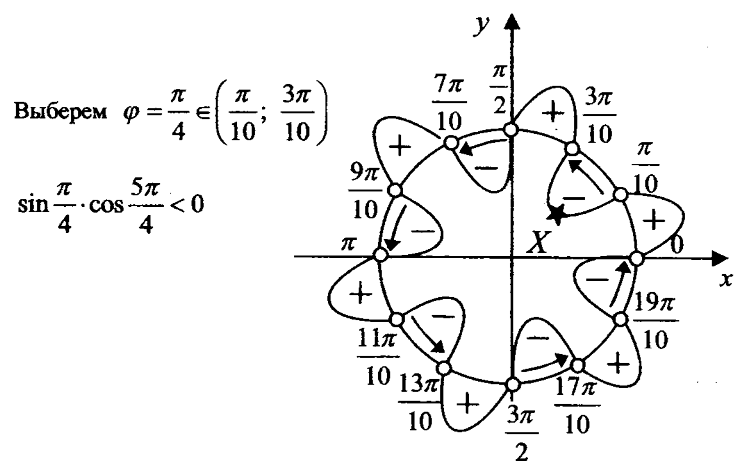
$n=0$	$t=0$
$n=1$	$t=\pi$

2)

$k=0$	$t=\dfrac{\pi}{10}$	$k=5$	$t=\dfrac{11\pi}{10}$
$k=1$	$t=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{3\pi}{10}$	$k=6$	$t=\dfrac{13\pi}{10}$
$k=2$	$t=\dfrac{\pi}{2}$	$k=7$	$t=\dfrac{3\pi}{2}$
$k=3$	$t=\dfrac{7\pi}{10}$	$k=8$	$t=\dfrac{17\pi}{10}$
$k=4$	$t=\dfrac{9\pi}{10}$	$k=9$	$t=\dfrac{19\pi}{10}$

Выберем $\varphi=\dfrac{\pi}{4}\in\left(\dfrac{\pi}{10};\ \dfrac{3\pi}{10}\right)$

$$\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{5\pi}{4}<0$$



Из рисунка видно, что решение $\left(\dfrac{\pi}{10};\ \dfrac{3\pi}{10}\right)$ повторится через π, это интервал $\left(\dfrac{11\pi}{10};\ \dfrac{13\pi}{10}\right)$, решения $\left(\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{7\pi}{10}\right)\cup\left(\dfrac{9\pi}{10};\ \pi\right)$ через период π будут интервалами $\left(\dfrac{3\pi}{2};\ \dfrac{17\pi}{10}\right)\cup\left(\dfrac{19\pi}{10};\ 2\pi\right)$.

Следовательно, ответ можно записать в виде:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{10}+\pi k<t<\dfrac{3\pi}{10}+\pi k \\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n<t<\dfrac{7\pi}{10}+\pi n \\ \dfrac{9\pi}{10}+\pi m<t<\pi+\pi m \qquad k,\ n,\ m\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Так как $t=\dfrac{x}{2}$, то:
$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{5}+2\pi k<x<\dfrac{3\pi}{5}+2\pi k \\ \pi+2\pi n<x<\dfrac{7\pi}{5}+2\pi n \\ \dfrac{9\pi}{5}+2\pi m<x<2\pi+2\pi m \qquad k,\ n,\ m\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\left(\dfrac{\pi}{5}+2\pi k;\ \dfrac{3\pi}{5}+2\pi k\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\ \dfrac{7\pi}{5}+2\pi n\right)\cup$
$\cup\left(\dfrac{9\pi}{5}+2\pi m;\ 2\pi+2\pi m\right)$, $k,\ n,\ m\in\mathbb{Z}$.

3.23. Решите неравенство: $\sin x\cdot\cos 5x<\sin 2x\cdot\cos 4x$.

Решение:

По формулам преобразования произведения тригонометрических функций в сумму, получим:

$$\frac{1}{2}\left(\sin 6x+\sin(-4x)\right)<\frac{1}{2}\left(\sin 6x+\sin(-2x)\right)$$

$$\sin 6x-\sin 4x<\sin 6x-\sin 2x$$

$$\sin 2x-\sin 4x<0$$

$$\sin 2x-2\sin 2x\cdot\cos 2x<0$$

$$\sin 2x(1-2\cos 2x)<0$$

$$\sin 2x(2\cos 2x-1)>0$$

1) $\sin 2x = 0$

$2x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$x = \dfrac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

2) $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$

$2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

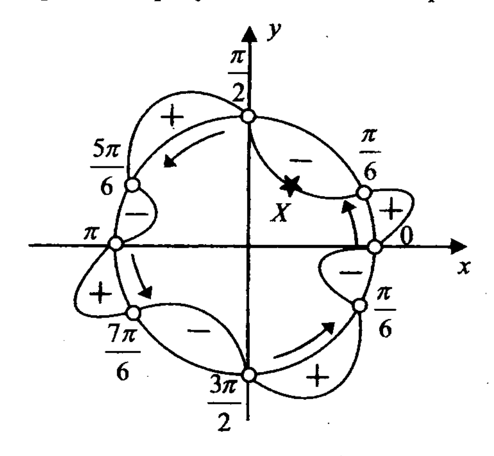
$x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

$k=0$	$x=0$	$n=0$	$x=\pm\dfrac{\pi}{6}$
$k=1$	$x=\dfrac{\pi}{2}$	$n=1$	$x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi \Rightarrow x_1=\dfrac{7\pi}{6},\ x_2=\dfrac{5\pi}{6}$
$k=2$	$x=\pi$		
$k=3$	$x=\dfrac{3\pi}{2}$		

Выберем $\varphi = \dfrac{\pi}{3} \in \left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{2}\right)$: $\sin\dfrac{2\pi}{3}\left(2\cos\dfrac{2\pi}{3} - 1\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) - 1\right) < 0.$

Следовательно, X находится внутри окружности.

Проведем кривую знаков и найдем решения неравенства.



Учитывая периодичность, запишем ответ.

Ответ: $x \in \left(\pi k; \dfrac{\pi}{6} + \pi k\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \dfrac{5\pi}{6} + \pi n\right), \quad k, n \in \mathbb{Z}.$

ГЛАВА VII. НАЧАЛА АНАЛИЗА

§1. ФУНКЦИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Понятие функции было и остается одним из основных понятий математики школьного курса.

Определение 1. Если каждому значению x числового множества X по правилу f соответствует единственное число множества Y, то говорят, что на числовом множестве X задана ***функция*** $y = f(x)$.

В этом случае независимую переменную x называют *аргументом* функции, а зависимую переменную y - *значением* функции.

В данном параграфе рассматриваются следующие темы:
- область определения функции;
- область значений функции;
- четные и нечетные функции;
- периодические функции;
- сложные функции;
- обратные функции.

1.1. Какие из точек $A\left(\frac{1}{25};-2\right)$, $B\left(\frac{1}{5};1\right)$, $C(5;-1)$, $D\left(\frac{1}{125};2\right)$ принадлежат графику функции $y(x) = \log_{0,2} x$?

Решение:

Упростим исходную функцию:

$$y(x) = \log_{0,2} x = \log_{\frac{1}{5}} x = \log_{5^{-1}} x = -\log_5 x.$$

Для того чтобы определить, какие из четырех заданных точек принадлежат графику исходной функции, подставим абсциссы четырех заданных точек в полученное выше выражение и найдем соответствующие ординаты.

$y\left(\frac{1}{25}\right) = -\log_5 \frac{1}{25} = -(-2) = 2$, следовательно, $A\left(\frac{1}{25};-2\right) \notin y(x)$.

$y\left(\frac{1}{5}\right) = -\log_5 \frac{1}{5} = -(-1) = 1$, следовательно, $B\left(\frac{1}{5}; 1\right) \in y(x)$;

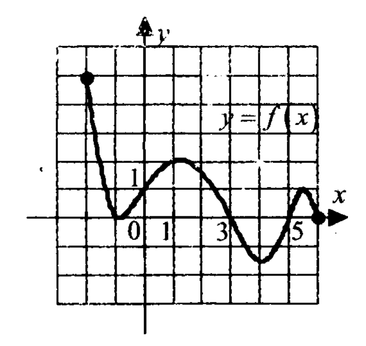
$y(5) = -\log_5 5 = -1$, следовательно, $C(5; -1) \in y(x)$;

$y\left(\frac{1}{125}\right) = -\log_5 \frac{1}{125} = -(-3) = 3$, следовательно, $D\left(\frac{1}{125}; 2\right) \notin y(x)$.

Таким образом, из четырех заданных точек графику функции $y(x) = \log_{0,2} x$ принадлежат только две: $B\left(\frac{1}{5};1\right)$ и $C(5;-1)$.

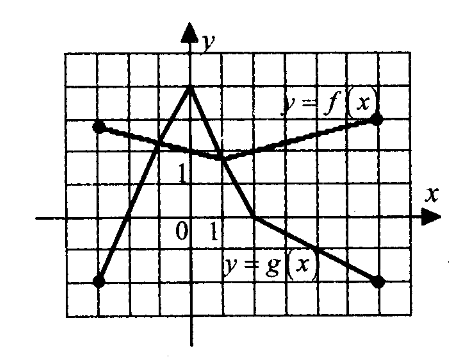
Ответ: $B\left(\frac{1}{5};1\right)$ и $C(5;-1)$.

1.2. Функция $y = f(x)$ задана графиком. Укажите промежуток, на котором она принимает только отрицательные значения.



Ответ: $(3; 5)$.

1.3. На рисунке изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке $[-3; 6]$. Укажите те значения переменной x, для которых выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$.



Ответ: $[-1;1]$.

1.4. Дана функция $f(x) = 2^{2x-3}$. Найдите значение переменной x, если $f(x) = 32$.

Решение:

Для того чтобы определить значение переменной x, решим уравнение:

$$2^{2x-3} = 32,$$

$$2^{2x-3} = 2^5,$$

$$2x - 3 = 5,$$

$$x = 4.$$

Таким образом, $f(x) = 32$ при $x = 4$.

Ответ: $x = 4$.

1.5. Дана функция $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{если } x \geq -1, \\ x + 1, & \text{если } x < -1 \end{cases}$. Вычислите $f(0) + f(-2)$.

Решение:

$f(0) = 0^2 - 1 = -1$, так как $0 > -1$.

$f(-2) = -2 + 1 = -1$, так как $-2 < -1$.

Тогда: $f(0) + f(-2) = -1 - 1 = -2$.

Ответ: -2.

1.6. При каких значениях параметра a график функции $f(x) = -2x^2 + 3x + a$ лежит в нижней координатной полуплоскости?

Решение:

График функции расположен в нижней координатной полуплоскости, если:

1) ветви параболы направлены вниз $(a < 0)$;

2) график функции не пересекает ось Ox $(D < 0)$.

$$\begin{cases} a < 0, \\ b^2 - 4ac < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < 0, \\ 9 + 8a < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < 0, \\ a < -\dfrac{9}{8}; \end{cases} \quad a < -\frac{9}{8}.$$

Ответ: $a \in \left(-\infty;\ -\dfrac{9}{8}\right)$.

1.7. Найдите ординату точки пересечения графика функции $f(x) = \sqrt{5x+6}$ и прямой $g(x) = 3x - 2$.

Решение:

Найдем абсциссу точки пересечения графика функции $f(x)$ и прямой $g(x)$, решив уравнение:

$$\sqrt{5x+6} = 3x - 2.$$

Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 5x + 6 = (3x-2)^2, \\ 3x - 2 \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 9x^2 - 17x - 2 = 0, \\ x \ge \dfrac{2}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -\dfrac{1}{9}; \end{array}\right. \\ x \ge \dfrac{2}{3}; \end{cases} \quad x = 2.$$

Тогда ордината точки пересечения:

$$y = f(2) = g(2) = 6 - 2 = 4.$$

Ответ: 4.

1.8. Найдите точку пересечения графиков функций $y=\log_3 x$ и $y=3-\log_3(x+6)$.

Решение:

Задача сводится к решению уравнения:

$$\log_3 x = 3-\log_3(x+6),$$

которое равносильно системе:

$\begin{cases}\log_3 x+\log_3(x+6)=3,\\ x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}\log_3(x^2+6x)=3,\\ x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+6x=27,\\ x>0;\end{cases}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-9,\\ x=3;\end{array}\right.\\ x>0;\end{cases}$ $x=3$.

Ордината точки пересечения: $y(3)=\log_3 3=1$.

Точка пересечения графиков функций имеет координаты: $(3;1)$.

Ответ: $(3;1)$.

1.9. При каких значениях x график функции $f(x)=\frac{9}{x}$ расположен ниже биссектрисы I и III координатных углов?

Решение:

Биссектриса I и III координатных углов задается функцией $y=x$.

Решение задачи сводится к решению неравенства:

$\frac{9}{x}<x$; $\frac{x^2-9}{x}>0$; $\frac{(x-3)(x+3)}{x}>0$.

$x\in(-3;0)\cup(3;\infty)$.

Ответ: $x\in(-3;0)\cup(3;\infty)$.

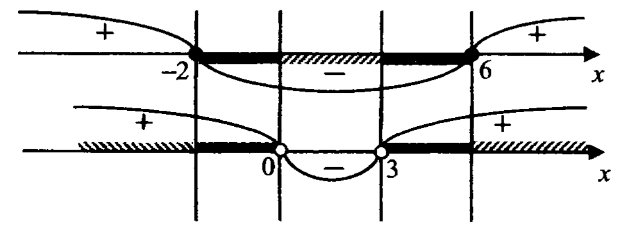
1.10. Найдите, при каких значениях x график функции $f(x)=\log_2(x^2-3x)$ расположен не выше графика функции $g(x)=\log_2(x+12)$.

Решение:

График функции $f(x)$ расположен не выше графика функции $g(x)$, если выполняется следующее неравенство: $f(x)\le g(x)$.

$\log_2(x^2-3x)\le\log_2(x+12)$ $\begin{cases}x^2-3x\le x+12,\\ x^2-3x>0;\end{cases}$

$\begin{cases}x^2-4x-12\le 0,\\ x^2-3x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}(x-6)(x+2)\le 0,\\ x(x-3)>0.\end{cases}$



$x\in[-2;0)\cup(3;6]$

Ответ: $x\in[-2;0)\cup(3;6]$.

Область определения функции

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, заданную аналитически, то есть в виде формулы.

Определение 2. ***Областью определения*** функции $y=f(x)$ называют множество всех значений переменной x, для которых аналитическое выражение $f(x)$ имеет смысл.

Область определения функции $f(x)$ принято обозначать $D(f)$ или $D(y)$.

При нахождении области определения функции следует использовать **следующие правила**:

1. Дробь имеет смысл, если ее знаменатель отличен от нуля.

2. Корень четной степени существует, если подкоренное выражение неотрицательно; корень нечетной степени существует при любом значении подкоренного выражения.

3. Функция $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ определена на множестве всех действительных чисел, $x \in \mathbb{R}$.

4. Логарифм по основанию a $(a > 0,\ a \neq 1)$ существует, если выражение под знаком логарифма положительно.

5. Областью определения функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ является множество всех действительных чисел, $x \in \mathbb{R}$.

6. Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ определена, если $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

7. Функции $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ определены, если $|x| \leq 1$, то есть $-1 \leq x \leq 1$.

1.11. Найдите область определения функций:

1) $f(x) = \dfrac{x}{x^3 + x}$

2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$

3) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{2 + x}{1 - x}}$

4) $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{3 + x}$

5) $f(x) = \sqrt{6 - x^2 - 5x} + \dfrac{1}{\sqrt[5]{x + 3}}$

6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{14 + 5x - x^2}} + \sqrt{x^2 - x - 20}$

7) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{x}}}$

8) $f(x) = \sqrt{2^x - 3^x}$

9) $f(x) = 0{,}5^{\sqrt{4 - x^2}} + \dfrac{1}{x - 1}$

10) $f(x) = \log_{0,5}(3 + 4x - x^2)$

11) $f(x) = \log_{3+x}(x^2 - 1)$

12) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x}}{\log_5(x - 1)}$

13) $f(x)=\dfrac{\log_3\left(7x-x^2-10\right)}{\sqrt[3]{x-4}}$

14) $f(x)=\sqrt{\log_2^2 x-4\log_2 x+3}$

15) $f(x)=\dfrac{1}{\sin(3x-2)}$

16) $f(x)=\sqrt[4]{\sin x-1}$

17) $f(x)=\sqrt{\cos^2 x-1}$

18) $f(x)=\operatorname{tg} 2x-\dfrac{7}{\sqrt{x+1}}$

19) $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}\,\operatorname{ctg}(\pi x)$

20) $f(x)=\arcsin\dfrac{1+x^2}{2x}$

21) $f(x)=\sqrt{3-x}+\arccos\left(\dfrac{x-2}{3}\right)$

Решение:

1) $f(x)=\dfrac{x}{x^3+x}$

Дробное выражение имеет смысл, если знаменатель отличен от нуля.

$D(f)$: $\quad x^3+x\neq 0$,

$x\left(x^2+1\right)\neq 0$,

$x\neq 0$.

Ответ: $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.

Замечание. Задающее функцию выражение можно было бы упростить:

$$\frac{x}{x^3+x}=\frac{x}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{x^2+1}.$$

Полученное выражение определено для всех $x\in\mathbb{R}$, то есть упрощение приводит к расширению области определения. Поэтому правильнее находить $D(f)$, не упрощая выражение для $f(x)$.

2) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$

Квадратный корень существует, если подкоренное выражение неотрицательно.

$D(f)$: $\quad \underbrace{x^2+2x+3}_{D<0} \geq 0$,

$x \in (-\infty;\ \infty)$.

Ответ: $D(f) = \mathbb{R}$.

3) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{2+x}{1-x}}$

Корень нечетной степени существует при любом значении подкоренного выражения. Поэтому нахождение области определения данной функции сводится к нахождению области определения дробного выражения.

$D(f)$: $\quad 1-x \neq 0$,

$x \neq 1$.

Ответ: $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$.

Область определения *суммы*, *разности*, *произведения* двух или нескольких функций есть пересечение областей определения этих функций. Для ее нахождения составляется и решается **система** соответствующих условий.

4) $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{3+x}$

Область определения данной функции совпадает с множеством решений системы:

$\begin{cases} -x \geq 0, \\ 3+x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0, \\ x \neq -3; \end{cases} \quad x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 0]$.

Ответ: $D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; 0]$.

5) $f(x) = \sqrt{6-x^2-5x} + \dfrac{1}{\sqrt[5]{x+3}}$

Область определения данной функции $D(f)$:

$\begin{cases} 6-x^2-5x \geq 0, \\ \sqrt[5]{x+3} \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+5x-6 \leq 0, \\ x+3 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+6)(x-1) \leq 0, \\ x \neq -3; \end{cases}$

$$\begin{cases} x \in [-6; 1], \\ x \neq -3; \end{cases} \qquad x \in [-6; -3) \cup (-3; 1].$$

Ответ: $D(f) = [-6; -3) \cup (-3; 1]$.

6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{14 + 5x - x^2}} + \sqrt{x^2 - x - 20}$

Область определения данной функции совпадает с множеством решений системы:

$$\begin{cases} x^2 - x - 20 \geq 0, \\ 14 + 5x - x^2 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x+4)(x-5) \geq 0, \\ (x+2)(x-7) < 0; \end{cases}$$

Ответ: $D(f) = [5; 7)$.

7) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{x}}}$

Область определения данной функции $D(f)$:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 2 - \sqrt{x} > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0, \\ \sqrt{x} < 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0, \\ x < 4; \end{cases} \qquad x \in [0; 4).$$

Ответ: $D(f) = [0; 4)$.

8) $f(x) = \sqrt{2^x - 3^x}$

$D(f)$: $\quad 2^x - 3^x \geq 0,$

$2^x \geq 3^x, \qquad \Big| : 3^x > 0$

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^x \geq 1,$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \left(\frac{2}{3}\right)^0,$$

$$x \leq 0 \quad \left(\text{ так как } 0 < \frac{2}{3} < 1\right).$$

Ответ: $D(f) = (-\infty; 0]$.

9) $f(x) = 0,5^{\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{1}{x-1}$

Область определения данной функции найдем, решив систему:

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0, \\ x - 1 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-2)(x+2) \leq 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad x \in [-2; 1) \cup (1; 2].$$

Ответ: $D(f) = [-2; 1) \cup (1; 2]$.

10) $f(x) = \log_{0,5}(3 + 4x - x^2)$

Логарифм по основанию 0,5 существует, если выражение под знаком логарифма положительно.

$$D(f): \quad 3 + 4x - x^2 > 0,$$

$$\underbrace{x^2 - 4x - 3}_{D=7} < 0,$$

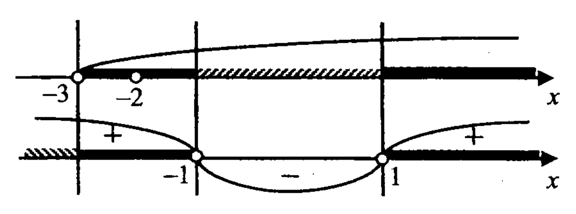
$$x \in \left(2 - \sqrt{7};\ 2 + \sqrt{7}\right).$$

Ответ: $D(f) = \left(2 - \sqrt{7};\ 2 + \sqrt{7}\right)$.

11) $f(x) = \log_{3+x}(x^2 - 1)$

Логарифм по основанию $(3 + x)$ существует, если основание логарифма положительно и при этом не равно единице, а так же выражение под знаком логарифма положительно.

$$\begin{cases} 3 + x > 0, \\ 3 + x \neq 1, \\ x^2 - 1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -3, \\ x \neq -2, \\ (x-1)(x+1) > 0. \end{cases}$$



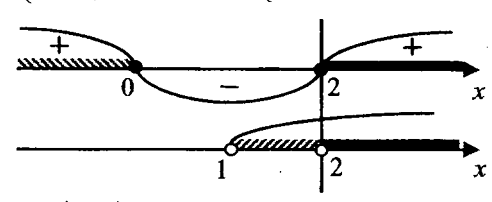
$x \in (-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (1; \infty)$.

Ответ: $D(f) = (-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (1; \infty)$.

12) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x}}{\log_5 (x-1)}$

Область определения данной функции совпадает с множеством решений системы:

$$\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0, \\ x - 1 > 0, \\ \log_5 (x-1) \neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x-2) \geq 0, \\ x > 1, \\ x \neq 2. \end{cases}$$



$x \in (2; \infty)$.

Ответ: $D(f) = (2; \infty)$.

13) $f(x) = \dfrac{\log_3 \left(7x - x^2 - 10\right)}{\sqrt[3]{x-4}}$

Область определения функции $D(f)$:

$$\begin{cases} 7x - x^2 - 10 > 0, \\ \sqrt[3]{x-4} \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 7x + 10 < 0, \\ x \neq 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 < x < 5, \\ x \neq 4; \end{cases} \quad x \in (2; 4) \cup (4; 5).$$

Ответ: $D(f) = (2; 4) \cup (4; 5)$.

14) $f(x)=\sqrt{\log_2^2 x-4\log_2 x+3}$

Область определения данной функции найдем, решив систему:

$\begin{cases} x>0, \\ \log_2^2 x-4\log_2 x+3\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>0, \\ (\log_2 x-1)(\log_2 x-3)\ge 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} \log_2 x\le 1, \\ \log_2 x\ge 3; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} x\le 2, \\ x\ge 8; \end{array}\right. \end{cases}$ $x\in(0;2]\cup[8;\infty)$.

Ответ: $D(f)=(0;2]\cup[8;\infty)$.

15) $f(x)=\dfrac{1}{\sin(3x-2)}$

$D(f)$: $\sin(3x-2)\ne 0$

$3x-2\ne \pi n$; $n\in\mathbb{Z}$

$x\ne\dfrac{2}{3}+\dfrac{\pi n}{3}$; $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $x\ne\dfrac{2}{3}+\dfrac{\pi n}{3}$; $n\in\mathbb{Z}$.

16) $f(x)=\sqrt[4]{\sin x-1}$

$D(f)$: $\sin x\ge 1$,

$\sin x=1$, (так как $-1\le\sin x\le 1$)

$x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$; $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$; $n\in\mathbb{Z}$.

17) $f(x)=\sqrt{\cos^2 x-1}$

$D(f)$: $\cos^2 x-1\ge 0$,

$-\sin^2 x\ge 0$,

$\sin^2 x \le 0$,

$\sin x = 0$, (так как $0 \le \sin^2 x \le 1$)

$x = \pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: πn; $n \in \mathbb{Z}$.

18) $f(x) = \operatorname{tg} 2x - \dfrac{7}{\sqrt{x+1}}$

Область определения данной функции совпадает с множеством решений системы:

$$\begin{cases} x+1>0, \\ 2x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -1, \\ x \ne \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$-\frac{5\pi}{4}$ $-\frac{3\pi}{4}$ -1 $-\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{4}$ x

Ответ: $\left(-1;\ -\dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(-\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2};\ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}\right)$, $n = 0; 1; 2; \ldots$

19) $f(x) = \sqrt{3+2x-x^2} \cdot \operatorname{ctg}(\pi x)$

Область определения данной функции найдем, решив систему:

$$\begin{cases} 3+2x-x^2 \ge 0, \\ \pi x \ne \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-2x-3 \le 0, \\ x \ne n, \quad n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-3)(x+1) \le 0, \\ x \ne n, \quad n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \le x \le 3, \\ x \ne n, \quad n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \in [-1; 3], \\ x \ne -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3. \end{cases}$$

$x \in (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; 3)$.

Ответ: $D(f) = (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; 3)$.

20) $f(x) = \arcsin \dfrac{1+x^2}{2x}$

Функция $f(x)$ определена, если: $-1 \le \dfrac{1+x^2}{2x} \le 1$.

$$\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{2x} \geq -1,\\ \dfrac{1+x^2}{2x} \leq 1;\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{(x+1)^2}{2x} \geq 0,\\ \dfrac{(x-1)^2}{2x} \leq 0.\end{cases}$$

Решением системы неравенств являются две точки $x=-1$ и $x=1$.

Ответ: $D(f)=\{-1;1\}$.

21) $f(x)=\sqrt{3-x}+\arccos\left(\dfrac{x-2}{3}\right)$

Область определения заданной функции $D(f)$:

$$\begin{cases}3-x \geq 0,\\ -1 \leq \dfrac{x-2}{3} \leq 1;\end{cases} \qquad \begin{cases}x \leq 3,\\ -3 \leq x-2 \leq 3;\end{cases} \qquad \begin{cases}x \leq 3,\\ -1 \leq x \leq 5;\end{cases} \qquad -1 \leq x \leq 3.$$

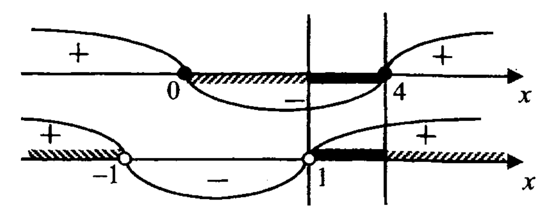
Ответ: $D(f)=[-1;3]$.

1.12. Найдите наименьшее целое значение x из области определения функции $f(x)=\sqrt{4x-x^2}\cdot\lg\left(x^2-1\right)$.

Решение:

Область определения данной функции совпадает с множеством решений системы:

$$\begin{cases}4x-x^2 \geq 0,\\ x^2-1>0;\end{cases} \qquad \begin{cases}x(x-4) \leq 0,\\ (x-1)(x+1)>0.\end{cases}$$



$D(f)=(1;4]$

Наименьшим целым числом из области определения функции является $x=2$.

Ответ: $x=2$.

1.13. Найдите длину области определения функции:

$f(x)=7\cdot\sqrt[4]{9-x^2}-4\sqrt{2x+1}-3$.

Решение:

Область определения данной функции:

$$\begin{cases}9-x^2\ge 0,\\2x+1\ge 0;\end{cases}\quad \begin{cases}(x-3)(x+3)\le 0,\\x\ge -\dfrac{1}{2};\end{cases}\quad \begin{cases}-3\le x\le 3,\\x\ge -\dfrac{1}{2};\end{cases}\quad x\in\left[-\frac{1}{2};\,3\right].$$

$D(f)=[-0,5;\ 3]$

Длина области определения функции: $3-(-0,5)=3,5$.

Ответ: 3,5.

Число x_0 из области определения функции $y=f(x)$ называется ***нулем функции***, если $f(x_0)=0$.

1.14. Найдите нули функции $f(x)=(x^2-3x-18)\sqrt{x-2}$.

Решение:

Область определения функции $D(f)$: $x\ge 2$.

Для того чтобы найти нули функции, решим уравнение:

$(x^2-3x-18)\sqrt{x-2}=0$,

которое равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=0,\\ x^2-3x-18=0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=6,\\ x=-3\notin D(f).\end{array}\right.$$

С учетом области определения получаем, что нулями функции являются $x=2$ и $x=6$.

Ответ: $\{2;6\}$.

1.15. Укажите промежуток наименьшей длины, которому принадлежат все нули функции $f(x)=2\sqrt{2}-\sqrt{x^2-2x}$.

Решение:

Область определения функции.

$D(f)$: $\quad x^2-2x\geq 0,$

$x(x-2)\geq 0,$

$x\in(-\infty;0]\cup[2;\infty).$

Для того чтобы найти нули функции, решим уравнение:

$2\sqrt{2}-\sqrt{x^2-2x}=0$

$\sqrt{x^2-2x}=2\sqrt{2}$

$x^2-2x=8$

$x^2-2x-8=0$

$x_1=-2\in D(f),$

$x_2=4\in D(f)$

Промежуток наименьшей длины, которому принадлежат все нули заданной функции, есть $[-2;4]$.

Ответ: $[-2;4]$.

Область значений функции

Часто при исследовании функции важно знать не только область определения, но и область значений функции, т.е. в каких границах может изменяться сама функция.

Определение 3. Все значения, которые принимает функция $y = f(x)$ при значениях переменной x, принадлежащих области определения функции, образуют ***область значений*** функции.

Область значений функции $f(x)$ принято обозначать $E(f)$ или $E(y)$.

Область значений основных элементарных функций

Функция $f(x)$	**Множество значений** $E(y)$	**Функция** $f(x)$	**Множество значений** $E(y)$
$f(x) = kx + b$	$E(f) = (-\infty; \infty)$	$f(x) = \sin x$	$E(f) = [-1; 1]$
$f(x) = x^{2k}$	$E(f) = [0; \infty)$, $k \in \mathbb{N}$	$f(x) = \cos x$	$E(f) = [-1; 1]$
$f(x) = x^{2k+1}$	$E(f) = (-\infty; \infty)$, $k \in \mathbb{N}$	$f(x) = \text{tg } x$	$E(f) = (-\infty; \infty)$
$f(x) = \frac{k}{x}$	$E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$	$f(x) = \text{ctg } x$	$E(f) = (-\infty; \infty)$
$f(x) = \sqrt[2k]{x}$	$E(f) = [0; \infty)$	$f(x) = \arcsin x$	$E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$	$E(f) = (-\infty; \infty)$	$f(x) = \arccos x$	$E(f) = [0; \pi]$
$f(x) = a^x$	$E(f) = (0; \infty)$	$f(x) = \text{arctg } x$	$E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
$f(x) = \log_a x$	$E(f) = (-\infty; \infty)$	$f(x) = \text{arcctg } x$	$E(f) = (0; \pi)$

К основным методам и приемам нахождения множества значений функции относятся:

- графический метод;
- метод оценок;

- метод последовательного нахождения значений сложных аргументов функции;
- метод введения параметра;
- метод обратной функции (*рассматривается в последнем разделе данного параграфа*);
- использование производной (*данный прием рассматривается в §3 главы 7*).

Рассмотрим эти методы на конкретных примерах.

Графический метод

В случаях квадратичной или показательной функций удобно схематично изобразить график данной функции, а затем определить область ее значений.

Область значений квадратичной функции можно определить, зная координаты вершины параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = y(x_0).$$

1.16. Найдите область значений функции:

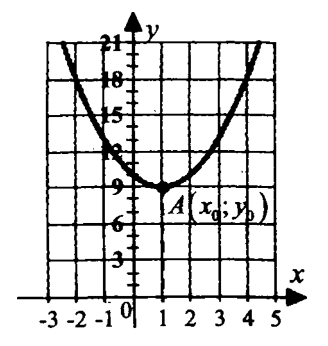
1) $y = x^2 - 2x + 10$ **2)** $y = -x^2 + 5x - 9$

Решение:

1) $y = x^2 - 2x + 10$

В данном случае: $x_0 = \frac{2}{2} = 1, \quad y_0 = 9.$

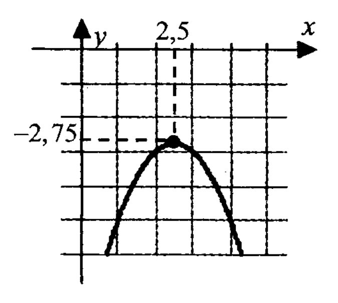
Так как ветви параболы направлены вверх, то вершина является точкой минимум функции, значит $y \geq 9$.



Ответ: $E(y) = [9; \infty)$.

2) $y = -x^2 + 5x - 9$

$x_0 = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$; $y_0(2{,}5) = -2{,}75$.



Координаты вершины параболы: $(2{,}5; -2{,}75)$.

Ветви параболы направлены вниз, значит, в вершине достигается максимальное значение функции и $y \le -2{,}75$.

Ответ: $E(y) = (-\infty; -2{,}75]$.

1.17. Найдите область значений функции:

1) $y = 3 - 0{,}4^x$ 2) $y = x - |x|$

3) $y = |x-2| - |x-3|$ 4) $y = \begin{cases} \sqrt{2-x}, & x \in [-7; 1); \\ x, & x \in [1; 2]. \end{cases}$

Решение:

1) $y = 3 - 0{,}4^x$

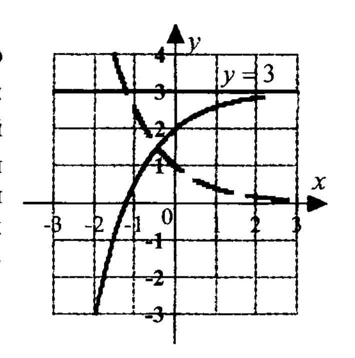


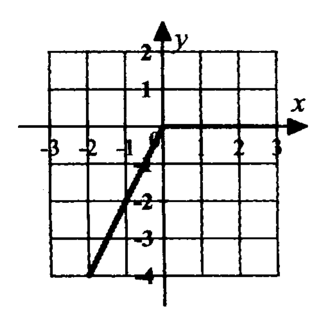
График функции $y = 3 - 0{,}4^x$ можно построить из графика функции $y = 0{,}4^x$ (изображен штриховой линией) двумя последовательными преобразованиями: симметрией относительно оси Ox и параллельным переносом вдоль оси Oy вверх на 3 единицы.

Ответ: $E(y) = (-\infty; 3)$.

2) $y = x - |x|$

По определению модуля:

$$y = \begin{cases} 0, & x \geq 0; \\ 2x, & x < 0. \end{cases}$$



Ответ: $E(y) = (-\infty; 0]$.

3) $y = |x-2| - |x-3|$

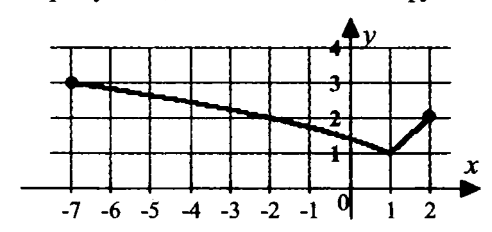
По определению модуля:

$$y = \begin{cases} -1, & x < 2; \\ 2x-5, & 2 \leq x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Ответ: $E(y) = [-1; 1]$.

4) $y = \begin{cases} \sqrt{2-x}, & x \in [-7; 1); \\ x, & x \in [1; 2]. \end{cases}$

Схематично построим эскиз графика кусочно-заданной функции, по которому найдем область значений функции.



Ответ: $E(y) = [1; 3]$.

1.18. Найдите область значений функции $f(x)=\cos 2x+2\cos x$.

Решение:

По формуле косинуса двойного угла преобразуем функцию:

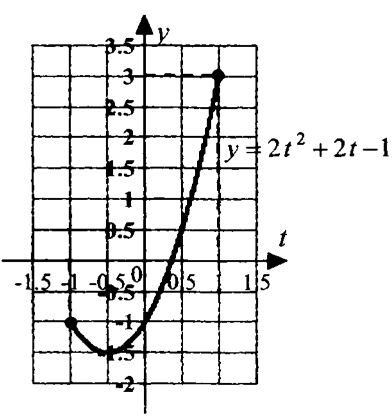
$f(x)=2\cos^2 x+2\cos x-1$.

Введем новую переменную: $t=\cos x$, тогда $f(x)=2t^2+2t-1$.

Так как $|\cos x|\le 1$, область значений функции $f(x)$ совпадает с множеством значений функции $g(t)=2t^2+2t-1$ на отрезке $[-1;1]$.

Построив график функции $y=2t^2+2t-1$ на промежутке $[-1;1]$, находим:

$E(f)=[-1,5;3]$.



Ответ: $E(f)=[-1,5;3]$.

Метод оценок

Суть данного метода состоит в оценке непрерывной функции снизу и сверху и в доказательстве достижения функцией нижней и верхней границы оценок. Так как функция непрерывна, множество значений функции совпадает с промежутком от нижней границы оценки до верхней.

1.19. Найдите область значений функции $y=\cos 7x+5\cos x$.

Решение:

В силу ограниченности функции $y=\cos x$ получаем оценку:

$$-1\le\cos 7x\le 1;$$

$$-5\le 5\cos x\le 5;$$

$$-6\le\cos 7x+5\cos x\le 6.$$

При $x=\pi$: $y(\pi)=\cos 7\pi+5\cos\pi=-1-5=-6$.

При $x=0$: $y(0)=\cos 0+5\cos 0=1+5=6$.

Следовательно, функция $y=\cos 7x+5\cos x$ достигает нижней и верхней границы оценки и, в силу непрерывности, принимает все значения от (-6) до 6 включительно.

Тогда $E(y)=[-6;6]$.

Ответ: $E(y)=[-6;6]$.

Наиболее распространенная ошибка при нахождении множества значений функции методом оценок состоит в следующем.

На основании полученных оценок, например, неравенств $A\le f(x)\le B$ делается ошибочное заключение о том, что множество значений функции есть отрезок $[A;B]$, в то время, как такое заключение можно сделать лишь тогда, когда функция непрерывна и имеются точки, в которых значения функции равны A и B (достигаются нижняя граница A и верхняя граница B).

В общем случае оценка $A\le f(x)\le B$ не означает, что множество значений функции совпадает со всем отрезком $[A;B]$.

Например, для функции $f(x)=\cos x+\sin x$ получаем оценку:

$$\begin{array}{l} -1\le\cos x\le 1; \\ -1\le\sin x\le 1; \\ \hline -2\le\cos x+\sin x\le 2. \end{array}$$

Но при этом нет таких значений x, при которых функция принимала бы значения (-2) или 2.

На самом деле, область значений данной функции есть $E(f)=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. Рассмотрим решение в следующем задании.

1.20. Найдите область значений функции $f(x)=\sin x+\cos x$.

Решение:

Преобразуем выражение $\sin x+\cos x$:

$$f(x)=\cos x+\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin x=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=$$
$$=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

Для последнего соотношения проведем оценку:

$$-1\le\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\le 1 \qquad \Big|\cdot\sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\le\sqrt{2}.$$

Функция $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ является непрерывной и принимает значения $\sqrt{2}$ и $\left(-\sqrt{2}\right)$ при $x=\frac{\pi}{4}$ и $x=\frac{5\pi}{4}$ соответственно. Следовательно, $E(f)=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Ответ: $E(f)=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

1.21. Найдите область значений следующих функций:

1) $y=2-3\cos(x+2)$

2) $y=\sin x\cdot\cos x$

3) $y=3+2\sin^2 3x$

4) $y=2\sin x+\cos^2 x$

5) $y=(\sin x+2\cos x)^2+3\sin^2 x$

6) $y=\dfrac{1}{2-\sin 3x}$

7) $y=\dfrac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}$

8) $y=2^{\cos x}$

9) $y=\log_{0,5}\left(4-2\cos^2 x\right)$

10) $y=3\cos x-4\sin x$

Решение:

В данных примерах заданы непрерывные на всей области определения функции и множество значений для них заключено между наименьшим и наибольшим значениями, если таковые существуют.

1) $y = 2 - 3\cos(x+2)$

Зная, что $-1 \le \cos x \le 1$, получаем:

$-1 \le \cos(x+2) \le 1 \qquad \Big| \cdot(-3)$

$-3 \le -3\cos(x+2) \le 3 \qquad \Big| +2$

$-1 \le -3\cos(x+2) + 2 \le 5$

$-1 \le y \le 5$

Тогда область значений исходной функции $E(y) = [-1; 5]$.

Ответ: $E(y) = [-1; 5]$.

2) $y = \sin x \cdot \cos x$

Приведем функцию к виду: $y = \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$.

$-1 \le \sin 2x \le 1 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\sin 2x \le \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$.

Ответ: $E(y) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

3) $y = 3 + 2\sin^2 3x$

$0 \le \sin^2 3x \le 1$

При $\sin^2 3x = 0$: $y = 3$ - минимальное значение.

При $\sin^2 3x = 1$: $y = 5$ - максимальное значение.

Ответ: $E(y) = [3; 5]$.

4) $y = 2\sin x + \cos^2 x$

$y = 2\sin x + \cos^2 x = 2\sin x + 1 - \sin^2 x = -(\sin^2 x - 2\sin x + 1) + 2 =$

$= -(\sin x - 1)^2 + 2$

При $\sin x = 1$: $y = 2$.

При $\sin x = -1$: $y = -2$.

Ответ: $E(y) = [-2;\ 2]$.

5) $y = (\sin x + 2\cos x)^2 + 3\sin^2 x$

Преобразуем исходную функцию:

$y = (\sin x + 2\cos x)^2 + 3\sin^2 x = \sin^2 x + 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x + 3\sin^2 x =$

$= 4(\sin^2 x + \cos^2 x) + 4\sin x\cos x = 4 + 2\sin 2x$.

Зная, что $-1 \le \sin x \le 1$, получаем:

$-1 \le \sin 2x \le 1 \quad | \cdot 2$

$-2 \le 2\sin 2x \le 2 \quad | + 4$

$2 \le 2\sin 2x + 4 \le 6$

$2 \le y \le 6$

Тогда область значений исходной функции $E(y) = [2;\ 6]$.

Ответ: $E(y) = [2;\ 6]$.

6) $y = \dfrac{1}{2 - \sin 3x}$ $\qquad D(y) = \mathbb{R}$

$-1 \le \sin 3x \le 1$

При $\sin 3x = -1$: $y = \dfrac{1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$ - минимальное значение.

При $\sin 3x = 1$: $y = \dfrac{1}{2-1} = 1$ - максимальное значение.

$\dfrac{1}{3} \le y \le 1$.

Ответ: $E(y) = \left[\dfrac{1}{3};\ 1\right]$.

7) $y=\dfrac{\cos x}{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}$

Область определения функции

$D(f)$: $\qquad \cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}\neq 0$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\neq 1$$

$$\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{4}+\pi n;\quad n\in\mathbb{Z}$$

$$x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi n;\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Область значений функции

$$y=\frac{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}=\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=$$

$$=2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Учитывая, что в область определения исходной функции не входят значения переменной $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$, при которых $\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$ или $\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$, оценочное неравенство должно быть **строгим**:

$$-1<\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)<1 \qquad \Big|\cdot\sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2}<\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2}.$$

Ответ: $E(y)=\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

8) $y = 2^{\cos x}$

$-1 \le \cos x \le 1$

$2^{-1} \le 2^{\cos x} \le 2^{1}$

$\frac{1}{2} \le y \le 2$.

Ответ: $E(y) = \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

9) $y = \log_{0,5}\left(4 - 2\cos^2 x\right)$ $\qquad D(y) = \mathbb{R}$

$0 \le \cos^2 x \le 1$

При $\cos^2 x = 0$: $y = \log_{0,5} 4 = -2$ - минимальное значение.

При $\cos^2 x = 1$: $y = \log_{0,5} 2 = -1$ - максимальное значение.

$-2 \le y \le -1$.

Ответ: $E(y) = [-2; -1]$.

10) $y = 3\cos x - 4\sin x$

Для преобразования данной функции введем вспомогательный угол (*смотри §2 главы 6*)

$$y = 3\cos x - 4\sin x = 5\left(\frac{3}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x\right) = 5\sin(\varphi - x),$$

где $\sin\varphi = \frac{3}{5}$, $\cos\varphi = \frac{4}{5}$.

$-1 \le \sin(\varphi - x) \le 1 \qquad | \cdot 5$

$-5 \le 5\sin(\varphi - x) \le 5$.

Ответ: $E(y) = [-5; 5]$.

1.22. Найдите наибольшее целое значение функции $f(x) = 2\sqrt{9\sin^2 x + 6\sin x + 13}$.

Решение:

$$f(x)=2\sqrt{9\sin^2 x+6\sin x+13}=2\sqrt{9\sin^2 x+6\sin x+1+12}=$$

$$=2\sqrt{(3\sin x+1)^2+12}\,.$$

Так как $-1\le \sin x\le 1$:

наибольшее значение полученная функция достигает при $\sin x=1$;

наименьшее - при $(3\sin x+1)=0$.

Если $\sin x=1$: $\quad f(x)=2\sqrt{4^2+12}=2\sqrt{28}=4\sqrt{7}\approx 10{,}583$;

Если $(3\sin x+1)=0$ $\quad f(x)=2\sqrt{12}=4\sqrt{3}\approx 6{,}928$.

Исходная функция непрерывна на всей числовой оси, значит, принимает все значения из интервала $\left[4\sqrt{3};\ 4\sqrt{7}\right]$. Тогда найдется такое значение переменной x, при котором $f(x)=10$.

Следовательно, 10 - наибольшее **целое** значение заданной функции.

Ответ: 10.

Метод последовательного нахождения значений сложных аргументов функции

1.23. Найдите область значений следующих функций:

1) $f(x)=2^{\sqrt{9-x^2}}$ **2)** $f(x)=\left(\frac{1}{9}\right)^{4x^2-8x+3}$

3) $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$ **4)** $f(x)=\lg\left(-x^2-2x+9\right)$

Решение:

1) $f(x)=2^{\sqrt{9-x^2}}$

$D(f)=[-3;3]$

Последовательно найдём множества значений сложных аргументов.

$x^2\ge 0$ (квадрат числа всегда неотрицательный)

$-x^2\le 0$ (умножаем на (-1) правую и левую части неравенства)

$9-x^2 \le 9$ (прибавляем 9 к каждой части неравенства)

$0 \le \sqrt{9-x^2} \le 3$ (считая $\left(9-x^2\right)$ неотрицательным, извлекаем корень)

$2^0 \le 2^{\sqrt{9-x^2}} \le 2^3$ (потенцируем полученное неравенство по основанию 2)

$1 \le 2^{\sqrt{9-x^2}} \le 8$

$1 \le f(x) \le 8$.

Следовательно, $E(f)=[1;8]$.

Ответ: $E(f)=[1;8]$.

2) $f(x)=\left(\frac{1}{9}\right)^{4x^2-8x+3}$

$f(x)>0$ для любого значения x, $f(x)$ - убывающая функция.

$$f(x)=\left(\frac{1}{9}\right)^{4x^2-8x+3}=\left(\frac{1}{9}\right)^{4x^2-8x+4-1}=\left(\frac{1}{9}\right)^{4(x-1)^2-1}.$$

Последовательно найдём множества значений сложных аргументов.

$(x-1)^2 \ge 0 \quad | \cdot 4$

$4(x-1)^2 \ge 0 \quad | +(-1)$

$4(x-1)^2-1 \ge -1$

$0<\left(\frac{1}{9}\right)^{4(x-1)^2-1} \le \left(\frac{1}{9}\right)^{-1}$ (потенцируем неравенство по основанию $\frac{1}{9}$)

$0<\left(\frac{1}{9}\right)^{4(x-1)^2-1} \le 9$

$0<f(x) \le 9$.

Следовательно, $E(f)=(0;9]$.

Ответ: $E(f)=(0;9]$.

3) $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$

$D(f)=[-1;2]$

Выделим в подкоренном выражении полный квадрат:

$$f(x)=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{1}{4}+x-x^2}=\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Последовательно найдём множества значений сложных аргументов:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0 \qquad \Big|\cdot(-1)$$

$$-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\le 0 \qquad \Big|+\frac{9}{4}$$

$$\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{9}{4}$$

$$0\le\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\le\frac{3}{2}$$ (извлекаем корень)

$$0\le f(x)\le\frac{3}{2}.$$

Ответ: $E(y)=\left[0;\ \frac{3}{2}\right]$.

4) $f(x)=\lg\left(-x^2-2x+9\right)$

$D(f)=\left(-1-\sqrt{10};-1+\sqrt{10}\right)$

Преобразуем функцию, выделив полный квадрат под логарифмом:

$$f(x)=\lg\left(-x^2-2x+9\right)=\lg\left(10-(x+1)^2\right).$$

Последовательно найдём множества значений сложных аргументов.

$$(x+1)^2\ge 0 \qquad \Big|\cdot(-1)$$

$$-(x+1)^2\le 0 \qquad \Big|+10$$

$$10-(x+1)^2 \le 10$$

$$\lg\left(10-(x+1)^2\right) \le \lg 10$$ (логарифмируем неравенство по основанию 10)

$$\lg\left(10-(x+1)^2\right) \le 1$$

Таким образом, $f(x) \le 1$.

Ответ: $E(f) = (-\infty; 1]$.

Метод введения параметра

Пусть функция задана формулой $y = f(x)$.

Возможна следующая схема применения данного метода:

1) рассматриваем данную функцию как уравнение с параметром a;

2) выясняем при каких значениях a уравнение $f(x) - a = 0$ имеет хотя бы один корень;

3) область значений функции $E(f)$ совпадает с множеством значений параметра a, для которых уравнение $f(x) = a$ имеет хотя бы один корень.

1.24. Найдите область значений функции $y = \dfrac{x^2-4x+4}{x^2+5}$.

Решение:

$$a = \frac{x^2-4x+4}{x^2+5}$$

Рассмотрим соотношение $a = \dfrac{x^2-4x+4}{x^2+5}$ как уравнение с параметром a.

Это уравнение равносильно: $x^2(a-1) + 4x + 5a - 4 = 0$.

Если $a = 1$, уравнение является линейным $4x + 1 = 0$ и имеет единственное решение.

Если $a \neq 1$, то квадратное уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен.

$$\frac{D}{4} = 4-(a-1)(5a-4) = 4-5a^2+9a-4 = 9a-5a^2$$

$$9a-5a^2 \geq 0$$

$$a(5a-9) \leq 0$$

$$a \in \left[0; \frac{9}{5}\right]$$

Так как $a=1$ принадлежит отрезку $\left[0; \frac{9}{5}\right]$, искомым множеством значений будет $E(f)=[0; 1,8]$.

Ответ: $E(y)=[0; 1,8]$.

1.25. Найдите область значений функции $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$.

Решение:

Запишем уравнение:

$\frac{x-1}{x^2+1}=a$; $\quad ax^2-x+a+1=0$.

Если $a=0$, то $x=1$.

Если $a \neq 0$, то полученное квадратное уравнение имеет решение только тогда, когда дискриминант неотрицателен, то есть:

$$1-4a(a+1) \geq 0.$$

$$4a^2+4a-1 \leq 0$$

$$a \in \left[-\frac{\sqrt{2}+1}{2}; \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right]$$

Так как $a=0$ принадлежит отрезку $\left[-\frac{\sqrt{2}+1}{2}; \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right]$,

искомым множеством значений будет: $E(f)=\left[-\frac{\sqrt{2}+1}{2};\ \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{\sqrt{2}+1}{2};\ \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right]$.

1.26. Найдите область значений функции:

1) $y=\frac{1}{x+1}$

2) $y=\sqrt{2x-x^2}$

3) $y=\sqrt{3-\left(\frac{1}{3}\right)^x}$

4) $y=\lg\left(5x^2-8x+4\right)$

Решение:

1) $y=\frac{1}{x+1}$

Рассмотрим параметрическое уравнение:

$\frac{1}{x+1}=a;\quad x+1=\frac{1}{a};\quad x=\frac{1-a}{a}.$

Уравнение имеет решение при $a\neq 0$.

Ответ: $E(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$.

2) $y=\sqrt{2x-x^2}$

$\sqrt{2x-x^2}=a,\ \ a\geq 0$

$2x-x^2=a^2$

$x^2-2x+a^2=0$

$D=1-a^2\geq 0$ при $a\in[-1;1]$.

Учитывая условие $a\geq 0$, получим $a\in[0;1]$.

Ответ: $E(y)=[0;1]$.

3) $y=\sqrt{3-\left(\frac{1}{3}\right)^x}$

$$\sqrt{3-\left(\frac{1}{3}\right)^x}=a\,,\ a\ge 0$$

$$3-\left(\frac{1}{3}\right)^x=a^2$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x=3-a^2$$

Это уравнение имеет решение, если $3-a^2>0$,
то есть $a\in\left(-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right)$.

Учитывая условие $a\ge 0$, получим $E(y)=\left[0;\sqrt{3}\right)$.

Ответ: $E(y)=\left[0;\sqrt{3}\right)$.

4) $y=\lg\left(5x^2-8x+4\right)$

$$\lg\left(5x^2-8x+4\right)=a$$

$$5x^2-8x+4=10^a$$

$$5x^2-8x+\left(4-10^a\right)=0$$

Уравнение имеет решение, если $D\ge 0$.

$$16-5\cdot\left(4-10^a\right)\ge 0$$

$$5\cdot 10^a\ge 4\,;\qquad 10^a\ge\frac{4}{5}\,;\qquad a\ge\lg\frac{4}{5}\,.$$

Ответ: $E(y)=\left[\lg\frac{4}{5};\ \infty\right)$.

Определение 4. Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X, называется ***четной***, если выполнены следующие условия:

1) множество X симметрично относительно начала координат;

2) для любого x из множества X справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.

Примеры четных функций $(ч)$:

x^{2k}; $\frac{1}{x^{2k}}$; $|x|$; $\cos x$; $\sin x^2$; $y = \text{const}$; $\text{tg}^2 x$; $|\text{ctg}\, x|$.

Определение 5. Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X, называется ***нечетной***, если выполнены следующие условия:

1) множество X симметрично относительно начала координат;

2) для любого x из множества X справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$.

Примеры нечетных функций $(н)$:

x^{2k-1}; $\frac{1}{x^{2k-1}}$; $\sqrt[2k-1]{x}$; $\sin x$; $\text{tg}\, x$; $\text{ctg}\, x$.

Существуют функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными.

Например: $f(x) = \frac{1}{x+1}$; $f(x) = x^2 + x + 1$.

Для первой функции не выполнено условие симметричности области определения $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$ относительно начала координат. Для второй функции можно указать такие значения x, для которых не выполнено условие $f(-x) = f(x)$, а также такие значения x, для которых не выполнено условие $f(-x) = -f(x)$ (например, $x = 2$).

Функции, которые не являются ни четными, ни нечетными, называются функциями ***общего вида***.

Свойства четных и нечетных функций:

1) Сумма *четных* функций есть функция *четная*.

2) Сумма *нечетных* функций есть функция *нечетная*.

3) Произведение *четных* функций есть функция *четная*.

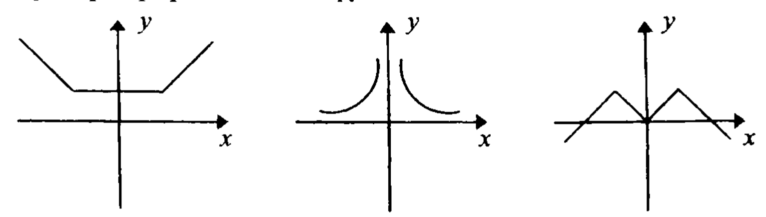
4) Произведение двух *нечетных* функций есть функция *четная*.

5) Произведение *четной* и *нечетной* функций - функция *нечетная*.

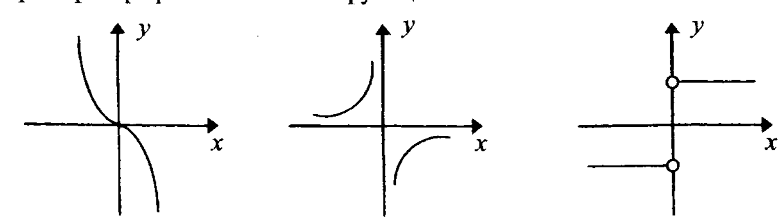
6) Если функция $f(x)$ четная (нечетная), то $\frac{1}{f(x)}$ четная (нечетная).

7) График четной функции симметричен относительно оси Oy. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

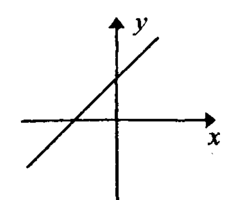
Примеры графиков четных функций:

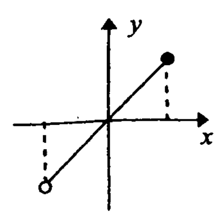


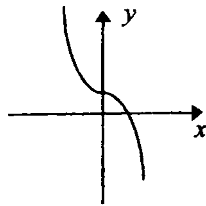
Примеры графиков нечетных функций:



Примеры графиков функций общего вида:







1.27. Установите четность или нечетность функций:

1) $f(x)=(x-3)^2-(x+3)^2$

2) $f(x)=(2-x)^5-(2+x)^5$

3) $f(x)=5^x+5^{-x}$

4) $f(x)=\dfrac{(1+2^x)^2}{2^x}$

5) $f(x)=\lg\dfrac{x+1}{1-x}$

6) $f(x)=\log_2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

7) $f(x)=\sin(2\cos x)$

8) $f(x)=\operatorname{ctg}3x\cdot\sqrt{\cos x+2}\cdot\sin x$

Решение:

1) $f(x)=(x-3)^2-(x+3)^2$

Область определения: $D(f)=\mathbb{R}$.

Для любого значения x выполнено:

$$f(-x)=(-x-3)^2-(-x+3)^2=(x+3)^2-(x-3)^2=$$
$$=-\left((x-3)^2-(x+3)^2\right)=-f(x).$$

Следовательно, функция является *нечетной*.

Ответ: нечетная.

2) $f(x)=(2-x)^5-(2+x)^5$

Область определения: $D(f)=\mathbb{R}$.

Для любого значения x выполнено:

$$f(-x)=(2+x)^5-(2-x)^5=-\left((2-x)^5-(2+x)^5\right)=-f(x).$$

Следовательно, функция является *нечетной*.

Ответ: нечетная.

3) $f(x)=5^x+5^{-x}$

Область определения: $D(f)=\mathbb{R}$.

Для любого значения x выполнено:

$f(-x)=5^{-x}+5^{x}=f(x)$.

Следовательно, функция является *четной*.

Ответ: четная.

4) $f(x)=\dfrac{\left(1+2^{x}\right)^{2}}{2^{x}}$

Область определения: $D(f)=\mathbb{R}$.

Для любого значения x выполнено:

$$f(-x)=\frac{\left(1+2^{-x}\right)^{2}}{2^{-x}}=\frac{\left(1+\frac{1}{2^{x}}\right)^{2}}{2^{-x}}=\frac{\left(2^{x}+1\right)^{2}}{2^{2x}\cdot 2^{-x}}=\frac{\left(2^{x}+1\right)^{2}}{2^{x}}=f(x).$$

Следовательно, функция является *четной*.

Ответ: четная.

5) $f(x)=\lg\dfrac{x+1}{1-x}$

$D(f)$: $\quad \dfrac{x+1}{1-x}>0$; $\quad \dfrac{x+1}{x-1}<0$; $\quad x\in(-1;\ 1)$.

Область определения функции $D(f)=(-1;\ 1)$ симметрична относительно начала координат.

Для любого значения x выполнено:

$$f(-x)=\lg\frac{-x+1}{1-(-x)}=\lg\frac{1-x}{1+x}=\lg\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{-1}=-\lg\frac{x+1}{1-x}=-f(x).$$

Следовательно, функция является *нечетной*.

Ответ: нечетная.

6) $f(x)=\log_{2}\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)$

$D(f)$: $\quad x+\sqrt{1+x^{2}}>0$

$\sqrt{1+x^{2}}>-x$

очевидно, что это неравенство выполняется
для любого значения x.

Область определения функции $D(f)=\mathbb{R}$.

$$f(-x)=\log_2\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)=\log_2\left(\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)=$$

$$=\log_2\left(\frac{1+x^2-x^2}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)=\log_2\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)=\log_2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-1}=$$

$$=-\log_2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=-f(x).$$

Следовательно, функция является *нечетной*.

Ответ: нечетная.

7) $f(x)=\sin(2\cos x)$

Область определения: $D(f)=\mathbb{R}$.

Для любого значения x выполнено:

$f(-x)=\sin\left(2\cos(-x)\right)=\sin(2\cos x)=f(x)$.

Следовательно, функция является *четной*.

Ответ: четная.

8) $f(x)=\operatorname{ctg}3x\cdot\sqrt{\cos x+2}\cdot\sin x$

$D(f)$: $\quad 3x\neq\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

$$x\neq\frac{\pi n}{3},\quad n\in\mathbb{Z}$$

Область определения функции $D(f)$ симметрична относительно начала координат.

Для любого значения x выполнено:

$f(-x)=\operatorname{ctg}(-3x)\cdot\sqrt{\cos(-x)+2}\cdot\sin(-x)=$

$$=(-\text{ctg}\,3x)\cdot\sqrt{\cos x+2}\cdot(-\sin x)=\text{ctg}\,3x\cdot\sqrt{\cos x+2}\cdot\sin x=f(x).$$

Следовательно, функция является *четной*.

Ответ: четная.

1.28. Какие из функций являются четными:

1) $f(x)=2\sin x\cdot\cos 3x\cdot\text{tg}\,5x$;

2) $f(x)=x^3\sin(x+|x|)$;

3) $f(x)=\text{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$;

4) $f(x)=\text{ctg}\,x+x\cos^2 x$?

Решение:

Проверим выполнение соотношения $f(-x)=f(x)$ для четырех заданных функций.

1) $f(x)=2\sin x\cdot\cos 3x\cdot\text{tg}\,5x$

$D(f)$: $\quad 5x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

$x\neq\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\quad n\in\mathbb{Z}$

Область определения симметрична относительно начала координат.

$$f(-x)=2\sin(-x)\cdot\cos(-3x)\cdot\text{tg}(-5x)=2(-\sin x)\cdot\cos 3x\cdot(-\text{tg}\,5x)=$$

$$=2\sin x\cdot\cos 3x\cdot\text{tg}\,5x=f(x).$$

Следовательно, $f(x)$ - *четная* функция.

2) $f(x)=x^3\sin(x+|x|)$

Область определения: $D(f)=\mathbb{R}$.

$$f(-x)=(-x)^3\sin(-x+|-x|)=-x^3\sin(-x+|x|)\neq f(x).$$

Следовательно, $f(x)$ - *функция общего вида.*

3) $f(x)=\mathrm{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$D(f):\qquad x-\dfrac{\pi}{3}\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\quad n\in\mathbb{Z}$

$$x\neq\frac{5\pi}{6}+\pi n;\quad n\in\mathbb{Z}$$

Область определения несимметрична относительно начала координат, следовательно, $f(x)$ - *функция общего вида.*

4) $f(x)=\mathrm{ctg}\,x+x\cos^2 x$

$D(f):\qquad x\neq\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

Область определения функции $D(f)$ симметрична относительно начала координат.

$$f(-x)=\mathrm{ctg}(-x)+(-x)\cos^2(-x)=-\mathrm{ctg}\,x-x\cos^2 x=-f(x).$$

Следовательно, $f(x)$ - *нечетная* функция.

Ответ: 1.

1.29. Выясните четность или нечетность функций:

1) $f(x)=|x|\cdot x^4+x^2$

2) $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{\sin x}+\sin x$

3) $f(x)=2-|x|+x^2$

4) $f(x)=0,5x^3-5x^2+x$

5) $f(x)=\dfrac{x+\sin x}{x^3+x^5}$

Решение:

Воспользуемся свойствами четных и нечетных функций.

1) $f(x)=|x|\cdot x^4+x^2$

$$f(x)=\underbrace{(ч)\cdot(ч)}_{(ч)}+(ч)=(ч)+(ч)$$

$f(x)$ - *четная* функция как сумма четных функций.

Ответ: четная.

2) $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{\sin x}+\sin x=|\sin x|\cdot\dfrac{1}{\sin x}+\sin x$

$$f(x)=\underbrace{(ч)\cdot(н)}_{(н)}+(н)=(н)+(н)$$

$f(x)$ - *нечетная* функция как сумма нечетных функций.

Ответ: нечетная.

3) $f(x)=2-|x|+x^2$

$$f(x)=(ч)-(ч)+(ч)$$

$f(x)$ - *четная* функция как сумма четных функций.

Ответ: четная.

4) $f(x)=0{,}5x^3-5x^2+x$

$$f(x)=(н)-(ч)+(н)$$

$f(x)$ является *функцией общего вида.*

Ответ: функция общего вида.

5) $f(x)=\dfrac{x+\sin x}{x^3+x^5}$

$$f(x)=\frac{(н)+(н)}{(н)+(н)}=\frac{(н)}{(н)}=(н)\cdot\frac{1}{(н)}$$

$f(x)$ - *четная* функция как произведение нечетных функций.

Ответ: четная.

1.30. При каком значении a, функция $f(x)=(x-3)^2-ax-2a$ является четной?

Решение:

$f(x)=(x-3)^2-ax-2a=x^2-6x+9-ax-2a=x^2-x(6+a)-2a+9$

$f(-x)=x^2+x(6+a)-2a+9$

Для того чтобы функция $f(x)$ была четной, необходимо выполнение равенства:

$f(-x)=f(x)$ для любого значения x из $D(f)=\mathbb{R}$.

$x^2-x(6+a)-2a+9=x^2+x(6+a)-2a+9$

$2x(6+a)=0$

$6+a=0;\quad x\neq 0$

$a=-6$

Ответ: $a=-6$.

1.31. При каком значении a, функция $f(x)=(a-2)x+3a-4$, $x\in(-\infty;\infty)$ является нечетной?

Решение:

$f(x)=(a-2)x+3a-4$

$f(-x)=(2-a)x+3a-4$

Для того чтобы функция $f(x)$ была нечетной, необходимо выполнение равенства:

$f(-x)=-f(x)$ для любого значения x из $D(f)=\mathbb{R}$.

$(2-a)x+3a-4=-((a-2)x+3a-4)$

$(2-a)x+3a-4=(2-a)x-3a+4$

$6a-8=0$

$a=\frac{4}{3}$ Ответ: $a=\frac{4}{3}$.

1.32. Найдите значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x)=(a+2)x^2+(a^2+5a+6)x+8$ является четной.

Решение:

Функция $f(x)$ будет четной, если равенство $f(x)=f(-x)$ будет выполнено для любого значения x из $D(f)=\mathbb{R}$.

$$(a+2)x^2+(a^2+5a+6)x+8=(a+2)(-x)^2+(a^2+5a+6)(-x)+8$$

$$(a+2)x^2+(a^2+5a+6)x+8=(a+2)x^2-(a^2+5a+6)x+8$$

$$2(a^2+5a+6)x=0$$

$a^2+5a+6=0$; $\quad x\neq 0$

$a_1=-3$; $a_2=-2$

Ответ: $a=-3$ или $a=-2$.

1.33. Найдите значение функции $y(x)=f(x)g(-x)+2f(-x)$ в точке x_0, если известно, что $f(x)$ - четная функция, $g(x)$ - нечетная функция, $f(x_0)=2$, $g(x_0)=-3$.

Решение:

Зная, что $f(-x)=f(x)$; $g(-x)=-g(x)$, преобразуем функцию $y(x)$:

$$y(x)=f(x)g(-x)+2f(-x)=-f(x)g(x)+2f(x).$$

Тогда $y(x_0)=-f(x_0)g(x_0)+2f(x_0)=-2\cdot(-3)+4=10$.

Ответ: 10.

1.34. Вычислите $f(5)$, если известно, что функция $g(x)=f(x)+x^2$ нечетная и $f(-5)=1$.

Решение:

$g(5)=f(5)+25$

$g(-5)=f(-5)+25$

$g(x)$ - нечетная функция, следовательно, $g(-5)=-g(5)$.

$f(-5)+25=-(f(5)+25)$

$f(5)=-50-f(-5)$

$f(5)=-50-1=-51$ (т.к. $f(-5)=1$)

Ответ: -51.

1.35. Дана четная функция $y=f(x)$ и нечетная функция $y=g(x)$. Найдите функции $f(x)$ и $g(x)$, если для всех действительных значений переменной x выполняется равенство $f(x)+g(x)=x^2-8x-6$.

Решение:

$f(x)+g(x)=x^2-8x-6$

$f(-x)+g(-x)=x^2+8x-6$

$f(x)$ - четная функция, а $g(x)$ - нечетная функция, следовательно, вышеприведенное соотношение можно переписать в виде:
$f(x)-g(x)=x^2+8x-6$.

Рассмотрим два соотношения:

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=x^2-8x-6, \\ f(x)-g(x)=x^2+8x-6. \end{cases}$$

Складывая и вычитая данные равенства, получим:

$$\begin{cases} 2f(x)=2x^2-12, \\ 2g(x)=-16x; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x)=x^2-6, \\ g(x)=-8x. \end{cases}$$

Ответ: $f(x)=x^2-6$; $g(x)=-8x$.

Определение 6. Функция $y = f(x)$ называется ***периодической***, если существует такое число $T > 0$, что для каждого значения x из области определения этой функции:

1) точки $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения функции;

2) выполняется равенство: $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$.

Число T называется *периодом* функции.

Если $f(x)$ - периодическая функция с периодом T, то выполняется равенство:

$f(x+nT) = f(x)$; $n \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, если T - период функции, то число nT, где $n \in \mathbb{Z}$, так же является периодом этой функции.

Наименьший из положительных периодов функции (если он существует) называется *основным периодом*.

Периодическими являются все известные тригонометрические функции:

$y = \sin x$, $y = \cos x$ — имеют основной период $T_0 = 2\pi$;

$y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ — имеют основной период $T_0 = \pi$.

Свойства периодических функций

1) Если $f(x)$ - периодическая функция с периодом T_0, то функция

$g(x) = A \cdot f(kx + b)$, где A, k, b - постоянные, $k \neq 0$,

также является периодической функцией, причем ее период равен $T = \dfrac{T_0}{|k|}$ (то есть период не зависит от A и b).

2) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на всей числовой оси и являются периодическими с периодами $T_1 > 0$ и $T_2 > 0$ $\left(\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}\right)$, то функция $y = f(x) + g(x)$ так же является периодической с периодом T, равным *наименьшему общему кратному* чисел T_1 и T_2.

1.36. Найдите наименьший положительный период функции:

1) $f(x) = \frac{1}{2}\sin \pi x$

2) $f(x) = 2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{3}\right)$

3) $f(x) = 3\sin\left(\sqrt{3}\,x - \frac{\pi}{9}\right)$

4) $f(x) = \cos 5x \cos 3x + \sin 5x \sin 3x$

5) $f(x) = 2\sin 2x \cos x - \sin x$

6) $f(x) = 0{,}2\sin 3x \cos 6x \cos 3x$

7) $f(x) = \cos x + \sin 2x$

8) $f(x) = \cos\frac{x}{3} + \operatorname{tg}\frac{x}{5}$

9) $f(x) = \cos 4x + \sin^2 x$

10) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

Решение:

1) $f(x) = \frac{1}{2}\sin \pi x$

$$T = \frac{T_0}{\pi} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

2) $f(x) = 2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{3}\right)$

$$T = T_0 : \left|-\frac{1}{3}\right| = \pi : \left|-\frac{1}{3}\right| = 3\pi$$

3) $f(x) = 3\sin\left(\sqrt{3}\,x - \frac{\pi}{9}\right)$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

4) $f(x)=\cos 5x\cos 3x+\sin 5x\sin 3x=\cos(5x-3x)=\cos 2x$

$$T=\frac{T_0}{2}=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

5) $f(x)=2\sin 2x\cos x-\sin x=2\cdot\frac{1}{2}(\sin 3x+\sin x)-\sin x=\sin 3x$

$$T=\frac{T_0}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

6) $f(x)=0,2\sin 3x\cos 6x\cos 3x=0,1\sin 6x\cos 6x=0,05\sin 12x$

$$T=\frac{T_0}{12}=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$$

7) $f(x)=\cos x+\sin 2x$

Для $\cos x$: $T_1=2\pi$.

Для $\sin 2x$: $T_2=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

$$T=\text{НОК}(T_1;T_2)=\text{НОК}(2\pi;\pi)=2\pi$$

8) $f(x)=\cos\frac{x}{3}+\text{tg}\frac{x}{5}$

Для $\cos\frac{x}{3}$: $T_1=2\pi:\frac{1}{3}=6\pi$.

Для $\text{tg}\frac{x}{5}$: $T_2=\pi:\frac{1}{5}=5\pi$.

$$T=\text{НОК}(T_1;T_2)=\text{НОК}(6\pi;5\pi)=30\pi$$

9) $f(x)=\cos 4x+\sin^2 x=\cos 4x+\frac{1-\cos 2x}{2}=\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$

Для $\cos 4x$: $T_1=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

Для $\cos 2x$: $T_2=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

$$T = \text{НОК}(T_1; T_2) = \text{НОК}\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) = \pi$$

10) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x =$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$$

$$T = \frac{T_0}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

1.37. Найдите период функции $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

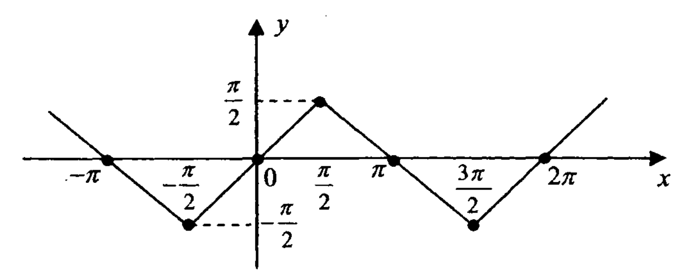
Решение:

$\sin x$ - периодическая функция с периодом $T_0 = 2\pi$, следовательно, имеет место равенство:

$$\arcsin(\sin(x + 2\pi)) = \arcsin(\sin x).$$

Из данного соотношения следует, что $f(x) = \arcsin(\sin x)$ также является периодической функцией с периодом $T = 2\pi$.

Ниже построен график функции $y = \arcsin(\sin x)$.



Ответ: $T = 2\pi$.

1.38. Известно, что $y = f(x)$ является четной периодической функцией с периодом 2. Найдите $f(9{,}7)$, если известно, что $f(0{,}3) = 3$.

Решение:

Период функции $f(x)$ равен 2, следовательно, значение функции в точке с абсциссой 9,7 совпадает со значением:

$f(9{,}7)=f(10-0{,}3)=f(5\cdot T-0{,}3)=f(-0{,}3)$.

Зная, что $f(x)$ - четная функция, получаем:

$f(-0{,}3)=f(0{,}3)=3$.

Ответ: 3.

1.39. Известно, что функция $y=f(x)$ является нечетной и периодической с периодом $T=10$. Найдите значение $f(1\,004)$, если $f(-4)=1{,}5$.

Решение:

Значение $f(1\,004)$ представим в виде:

$f(1\,004)=f(4+1\,000)=f(4+100T)=f(4)$.

Функция $f(x)$ нечетная, следовательно:

$f(4)=-f(-4)=-1{,}5$.

Ответ: $-1{,}5$.

1.40. Функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 6. При $-2\le x<4$ она задается формулой $f(x)=|x-2|-3$. Найдите значение выражения $4f(11)-2f(-15)$.

Решение:

Зная, что период $f(x)$ равен 6, приведем значения $f(11)$ и $f(-15)$ к значениям функции в точках на отрезке $[-2;4)$:

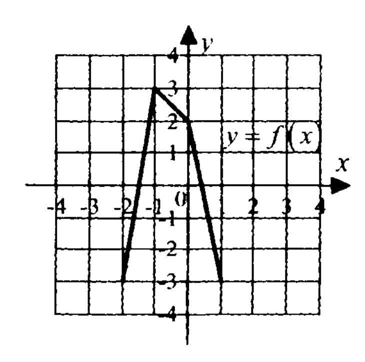
$4f(11)-2f(-15)=4f(-1+12)-2f(3-18)=$

$=4f(-1+2T)-2f(3-3T)=4f(-1)-2f(3)=$

$=4(|-1-2|-3)-2(|3-2|-3)=0+4=4$.

Ответ: 4.

1.41. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 3. На рисунке изображен график этой функции при $-2 \le x \le 1$. Найдите значение выражения: $f(-5) - f(-1) + f(12)$.



Решение:

$f(-5) - f(-1) + f(12) = f(-2-3) - f(-1) + f(0+4\cdot 3) =$

$= f(-2-T) - f(-1) + f(0+4T) = f(-2) - f(-1) + f(0) =$

$= (-3) - 3 + 2 = -4$.

Ответ: -4.

1.42. Найдите значение параметра a (или произведение таких значений, если их несколько), при которых период функции $f(x) = \sin((2a+5)x)$ равен $\frac{\pi}{20}$.

Решение:

$$T = \frac{T_0}{|2a+5|} = \frac{2\pi}{|2a+5|}$$

Зная, что период функции $f(x)$ равен $\frac{\pi}{20}$, составим уравнение:

$$\frac{2\pi}{|2a+5|} = \frac{\pi}{20}$$

$|2a+5| = 40$ $\left[\begin{array}{l} 2a+5 = 40, \\ 2a+5 = -40; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a = 17{,}5, \\ a = -22{,}5. \end{array}\right.$

Произведение равно: $\frac{35}{2}\cdot\left(-\frac{45}{2}\right)=-\frac{1575}{4}=-393\frac{3}{4}$.

Ответ: $-393{,}75$.

Сложные функции

Пусть заданы две функции $y=f(x)$ и $x=g(t)$, причем область определения функции $f(x)$ содержит множество значений функции $g(t)$. Тогда функция, которая каждому числу t из области определения функции $g(t)$ ставит в соответствие единственное число y из множества значений функции $f(x)$ по правилу $y=f(g(t))$, называется ***сложной*** функцией.

1.43. Даны функции $f(x)=x^3+2x$ и $g(x)=\sin x$. Задайте с помощью формулы функцию $f(g(x))$.

Решение:

Для более наглядного представления заменим в выражении для $f(x)$ переменную x на z:

$$f(z)=z^3+2z.$$

Теперь, чтобы найти функцию $f(g(x))$, нужно в выражении (z^3+2z) вместо z подставить выражение $(\sin x)$:

$$f(g(x))=\sin^3 x+2\sin x.$$

Ответ: $f(g(x))=\sin^3 x+2\sin x$.

1.44. Пусть $f(x)=x^2$, $g(x)=2^x$. Найдите $f(g(x))$ и $g(f(x))$.

Решение:

$f(g(x))=(2^x)^2=2^{2x}$

$g(f(x))=2^{x^2}$

Ответ: $f(g(x))=2^{2x}$ и $g(f(x))=2^{x^2}$

1.45. Дана функция $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}$, найдите $f(\operatorname{tg}\alpha)$.

Решение:

$$f(\operatorname{tg}\alpha)=\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}60^\circ-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\sin(60^\circ+\alpha)}{\cos 60^\circ\cdot\cos\alpha}:\frac{\sin(60^\circ-\alpha)}{\cos 60^\circ\cdot\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sin(60^\circ+\alpha)}{\sin(60^\circ-\alpha)}.$$

Ответ: $\dfrac{\sin(60^\circ+\alpha)}{\sin(60^\circ-\alpha)}$.

1.46. Если $f(k)=\dfrac{k}{k-3}$ и $g(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$, то чему равна функция $f(g(0))$?

Решение:

$$f(g(t))=f\left(\frac{1}{1+t^2}\right)=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}-3}=-\frac{1}{3t^2+2},\qquad f(g(0))=-\frac{1}{0+2}=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-0{,}5$.

1.47. Пусть $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$. Найдите $f\left(\dfrac{t}{t^2+1}\right)$.

Решение:

Чтобы найти $f\left(\dfrac{t}{t^2+1}\right)$, нужно в числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x^2}{x+1}$ вместо переменной x подставить выражение $\dfrac{t}{t^2+1}$.

$$f\left(\frac{t}{t^2+1}\right)=\frac{\left(\frac{t}{t^2+1}\right)^2}{\frac{t}{t^2+1}+1}=\frac{t^2}{(t^2+1)(t^2+t+1)}$$

Ответ: $\dfrac{t^2}{(t^2+1)(t^2+t+1)}$.

1.48. Дана функция $f(x)=2x^2-3x+1$, определите значение a из условия, что $f(1-a)-f(a-1)=0$.

Решение:

$$f(1-a)=2(1-a)^2-3(1-a)+1=2(a-1)^2+3(a-1)+1$$

$$\underline{f(a-1)=2(a-1)^2-3(a-1)+1}$$

$$f(1-a)-f(a-1)=6(a-1)$$

По условию задачи $6(a-1)=0$ или $a=1$.

Ответ: $a=1$.

1.49. Для функции $f(x)=\sqrt{x^2+5}$ найдите $f(f(x))$.

Решение:

$$f(f(x))=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2+5}=\sqrt{x^2+5+5}=\sqrt{x^2+10}.$$

Ответ: $f(f(x))=\sqrt{x^2+10}$.

1.50. Для функции $f(x)=2x-3$ найдите $f(f(f(x)))$.

Решение:

Последовательно найдем:

$$f(f(x))=2(2x-3)-3=4x-9;$$

$$f(f(f(x)))=4(2x-3)-9=8x-21.$$

Ответ: $f(f(f(x)))=8x-21$.

1.51. Известно, что $f(x+3)=2f(x)-5$ при всех значениях x. Выразите $f(x+6)$ через $f(x)$.

Решение:

$$f(x+6)=f((x+3)+3)=2f(x+3)-5=2(2f(x)-5)-5=4f(x)-15.$$

Ответ: $f(x+6)=4f(x)-15$.

1.52. Пусть $f(x)=\lg x$ и $g(x)=\dfrac{5-8x-x^2}{x+1}$. Найдите область определения функции $g(f(x))$.

***Решение*:**

Запишем сложную функцию: $g(f(x))=\dfrac{5-8\lg x-\lg^2 x}{\lg x+1}$.

Область определения данной функции совпадает с множеством решений системы:

$$\begin{cases} x>0, \\ \lg x+1\neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>0, \\ x\neq 0{,}1; \end{cases} \quad x\in\left(0;\frac{1}{10}\right)\cup\left(\frac{1}{10};\infty\right).$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{10}\right)\cup\left(\frac{1}{10};\infty\right)$.

1.53. Найдите $f(x)$, если $f(x^3)=3x^6-2x^3$.

***Решение*:**

$$f(x^3)=3x^6-2x^3=3(x^3)^2-2(x^3)$$

Тогда $f(x)=3x^2-2x$.

Ответ: $f(x)=3x^2-2x$.

1.54. Каким выражением задается функция $f(x)$, если $f(2+x)=8-4x-x^2$.

***Решение*:**

Сделаем замену $t=x+2$.

Тогда: $x=t-2$;

$$f(t)=8-4(t-2)-(t-2)^2=8-4t+8-t^2+4t-4=12-t^2.$$

Получаем, что $f(x)=12-x^2$.

Ответ: $f(x)=12-x^2$.

1.55. Пусть $f(x+2)=4-5x$, $f(g(x))=3x+2$. Найдите $g(x)$.

Решение:

Зная, что $f(x+2)=4-5x$, найдем выражение для $f(x)$.

Для этого введем новую переменную $t=x+2$.

Тогда $x=t-2$;

$$f(t)=4-5(t-2)=14-5t.$$

Таким образом, $f(x)=14-5x$, а $f(g(x))=14-5\cdot g(x)$.

По условию задачи $f(g(x))=3x+2$, тогда имеет место равенство:

$$14-5\cdot g(x)=3x+2$$

$$g(x)=\frac{12-3x}{5}.$$

Ответ: $g(x)=\dfrac{12-3x}{5}$.

Обратные функции

Пусть дана функция $y=f(x)$. Она имеет обратную, если из зависимости $y=f(x)$ можно переменную x однозначно выразить через переменную y.

Выразив x через y, мы получим равенство вида $x=g(y)$. В этой записи $g(y)$ определяет функцию, которая называется ***обратной к функции*** $f(x)$.

Чтобы найти в явном виде обратную функцию, достаточно поменять ролями (местами) x и y и решить полученное уравнение (если оно разрешимо) относительно y.

Поставим следующий вопрос: при каком условии существует функция, обратная к функции $f(x)$?

Сформулируем условие существования обратной функции геометрически:

Функция $y = f(x)$ имеет обратную, если всякая прямая $y = y_0$ пересекает график функции $y = f(x)$ не более чем в одной точке (она может совсем не пересекать график, если y_0 не принадлежит области значений функции $f(x)$).

По определению функция $f(x)$ имеет обратную, если уравнение $f(x) = y_0$ при каждом y_0 имеет не более одного решения.

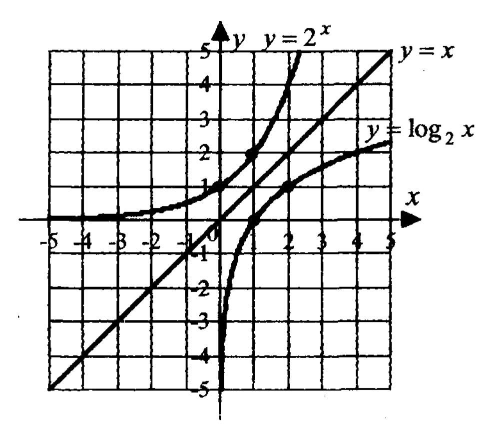
Условие того, что функция имеет обратную, заведомо выполняется, если функция строго возрастает или строго убывает.

Свойства взаимно обратных функций

1. Если функция $g(x)$ является обратной для функции $f(x)$, то и функция $f(x)$ является обратной для функции $g(x)$.

2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратные функции. Область определения функции $f(x)$ совпадает с областью значений функции $g(x)$, и, наоборот, область определения функции $g(x)$ совпадает с областью значений функции $f(x)$.

3. Графики функции $f(x)$ и обратной функции $g(x)$ симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов (прямая $y = x$).



4. Монотонность.

Если одна из взаимно обратных функций строго возрастает, то и другая строго возрастает.

1.56. Найдите обратные функции, к следующим функциям:

1) $y=\frac{x-1}{3}$

2) $y=\frac{x-2}{3x+5}$

3) $y=(x-3)^2+1$

4) $y=x^2$, если $x<0$

5) $y=x^2-4x+7$, если $x\le 2$

6) $y=x^3+3x^2+3x$

7) $y=\sqrt{3-2x}+1$

8) $y=\sqrt[3]{2x+7}$

9) $y=10^x+1$

10) $y=3^{-x}-2$

11) $y=\lg(1-x)$

12) $y=\log_5(x+1)-3$

Решение:

1) $y=\frac{x-1}{3}$

Поменяем местами переменные x и y в заданной функции и найдем новую зависимость y от x, это и будет функция, обратная для исходной.

$x=\frac{y-1}{3}$

$3x=y-1$

$y=3x+1$ - функция, обратная для функции $y=\frac{x-1}{3}$.

Ответ: $y=3x+1$.

2) $y=\frac{x-2}{3x+5}$

Поменяем местами переменные x и y: $x=\frac{y-2}{3y+5}$.

Из полученного соотношения выразим y:

$y-2=3xy+5x$

$y-3xy=5x+2$

$y(1-3x)=5x+2$.

$y=\dfrac{5x+2}{1-3x}$ - функция, обратная для функции $y=\dfrac{x-2}{3x+5}$.

Ответ: $y=\dfrac{5x+2}{1-3x}$.

3) $y=(x-3)^2+1$

Данная функция не является взаимно однозначной. Так, например, значение 5 она принимает дважды: $y(1)=y(5)=5$.

Нельзя однозначно выразить переменную x через переменную y из зависимости $y=(x-3)^2+1$, поэтому данная функция не имеет обратной.

Ответ: функция не обратима.

4) $y=x^2 \quad (x<0)$

Отличие этого примера от предыдущего заключается в том, что в данном случае область определения функции $y=x^2$ сокращена до полуоси $(-\infty;0)$, поэтому функция $y=x^2$ осуществляет взаимно однозначное отображение множества $(-\infty;0)$ на $(0;\infty)$.

То есть обратная функция существует и ее можно найти, заменив x на y, а y на x..

$x=y^2; \qquad y=\pm\sqrt{x}$.

По определению обратная функция должна отображать множество $(0;\infty)$ на $(-\infty;0)$. Тогда $y=-\sqrt{x}$.

Ответ: $y=-\sqrt{x}$.

5) $y=x^2-4x+7$, если $x\le 2$

Обратная функция существует.

$x=y^2-4y+7$

$y^2-4y+(7-x)=0$

Дискриминант квадратного уравнения: $\frac{D}{4}=4-(7-x)=x-3$.

Тогда $y_{1,2}=2\pm\sqrt{x-3}$.

По условию задачи областью определения исходной функции является интервал $(-\infty;2]$. Так как данное множество одновременно должно являться областью значений обратной функции, то $y=2-\sqrt{x-3}$.

Ответ: $y=2-\sqrt{x-3}$.

6) $y=x^3+3x^2+3x$

Поменяем местами переменные x и y: $x=y^3+3y^2+3y$.

Выразим y:

$y^3+3y^2+3y+1=x+1$

$(y+1)^3=x+1$

$y+1=\sqrt[3]{x+1}$

$y=\sqrt[3]{x+1}-1$.

Ответ: $y=\sqrt[3]{x+1}-1$.

7) $y=\sqrt{3-2x}+1$

Поменяем местами переменные x и y: $x=\sqrt{3-2y}+1$.

$\sqrt{3-2y}=x-1$

$3-2y=(x-1)^2$

$$y=\frac{3-(x-1)^2}{2}.$$

Ответ: $y=\frac{3-(x-1)^2}{2}$.

8) $y=\sqrt[3]{2x+7}$

Поменяем местами переменные x и y: $x=\sqrt[3]{2y+7}$.

$2y+7=x^3$

$y=\dfrac{x^3-7}{2}$.

Ответ: $y=\dfrac{x^3-7}{2}$.

9) $y=10^x+1$

$x=10^y+1$; $10^y=x-1$; $\lg 10^y=\lg(x-1)$; $y=\lg(x-1)$.

Ответ: $y=\lg(x-1)$.

10) $y=3^{-x}-2$

Поменяем местами переменные x и y.

$x=3^{-y}-2$

$3^{-y}=x+2$

Для того чтобы выразить переменную y из полученного соотношения, нужно логарифмировать правую и левую части равенства по основанию 3.

$-y=\log_3(x+2)$

$y=-\log_3(x+2)$.

Ответ: $y=-\log_3(x+2)$.

11) $y=\lg(1-x)$

Поменяем местами переменные x и y: $x=\lg(1-y)$.

Потенцируем полученное соотношение по основанию 10.

$10^{\lg(1-y)}=10^x$; $1-y=10^x$; $y=1-10^x$.

Ответ: $y=1-10^{x}$.

12) $y=\log_5(x+1)-3$

$x=\log_5(y+1)-3$

$\log_5(y+1)=x+3$; $y+1=5^{x+3}$; $y=5^{x+3}-1$.

Ответ: $y=5^{x+3}-1$.

1.57. Какой вид имеет функция, симметричная функции $y=5x-1$ относительно прямой $y=x$?

Решение:

Функция, симметричная функции $y=5x-1$ относительно прямой $y=x$, есть обратная функция.

$x=5y-1$; $y=\dfrac{x+1}{5}$.

Ответ: $y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{1}{5}$.

1.58. Найдите точки пересечения графиков функции $y=\sqrt{2x}$ и обратной ей функции.

Решение:

Найдем функцию, обратную $y=\sqrt{2x}$:

$x=\sqrt{2y}$; $y=\dfrac{x^2}{2}$.

Найдем точки пересечения графиков функций $y=\sqrt{2x}$ и $y=\dfrac{x^2}{2}$.

$\sqrt{2x}=\dfrac{x^2}{2}$; $x\geq 0$

$8x=x^4$

$x(x^3-8)=0$

$x_1=0$; $x_2=2$

Точки пересечения: $(0;0)$ и $(2;2)$.

Ответ: $(0;0)$ и $(2;2)$.

1.59. Пусть $g(x)$ - функция, обратная к $f(x)=x+x^5$. Вычислите $g(34)$.

Решение:

Отметим, что $f(2)=2+2^5=2+32=34$.

Функция $f(x)$ ставит в соответствие числу 2 значение 34.

Тогда обратная функция $g(x)$ числу 34 должна ставить в соответствие значение 2.

Ответ: $g(34)=2$.

Метод обратной функции
для определения области значений функции

Суть данного метода заключается в следующем. Пусть дана функция $y=f(x)$, у которой существует обратная функция. Для того чтобы найти множество значений функции $f(x)$, нужно из формулы $y=f(x)$ выразить переменную x через переменную y и для новой зависимости $x=g(y)$ найти область определения.

1.60. Найдите область значений следующих функций:

1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ **2)** $y=\dfrac{1}{2}-2^x$

Решение:

1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$

Выразим переменную x через y.

$y(1+x)=1-x$; $x(1+y)=1-y$; $x=\dfrac{1-y}{1+y}$.

Выражение $\frac{1-y}{1+y}$ имеет смысл при $y \neq -1$.

Ответ: $E(y) = (-\infty; -1)(-1; \infty)$.

2) $y = \frac{1}{2} - 2^x$

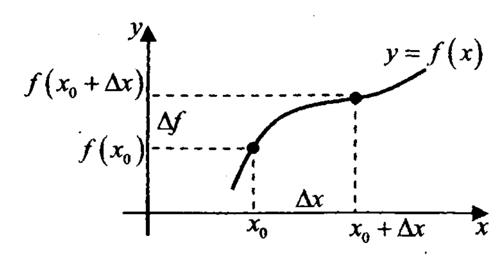
Выразим переменную x через y.

$2^x = \frac{1}{2} - y$; $\quad x = \log_2\left(\frac{1}{2} - y\right)$

$\log_2\left(\frac{1}{2} - y\right)$ определен, если $\frac{1}{2} - y > 0$ или $y < \frac{1}{2}$.

Ответ: $E(y) = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

§2. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ



<u>Определение</u>. ***Производной*** **функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к соответствующему приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю.**

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Данное определение производной характеризует понятие скорости изменения функции $f(x)$ при изменении аргумента x.

Операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием***.

Производная $y' = f'(x)$ - это новая функция, связанная с функцией $y = f(x)$, и определенная во всех таких точках x, в которых существует вышеуказанный предел. Для существования данного предела необходимо, чтобы $\Delta f \to 0$ при $\Delta x \to 0$ (в противном случае будет иметь место деление на нуль, что невозможно). Отмеченное условие является условием непрерывности функции в точке. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Необходимое условие дифференцируемости функции:

Для того чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема (имела производную) в точке x_0, необходимо, чтобы она была непрерывна в этой точке.

Сформулированное условие не является достаточным. Если в какой-либо точке функция $y = f(x)$ является непрерывной, то она может и не иметь производной в этой точке. Все функции, рассматриваемые в дальнейшем, будем считать дифференцируемыми.

Приведем основные правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного функций, а так же таблицу производных для основных элементарных функций (степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных тригонометрических). Это позволит находить производные всех функций, которые могут быть получены из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции.

Правила дифференцирования

1. Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

$$\left(c\cdot f(x)\right)' = c\cdot f'(x).$$

2. Производная суммы (разности) двух функций:

$$\left(f(x)\pm g(x)\right)' = f'(x)\pm g'(x)$$

(данная формула справедлива для любого конечного числа слагаемых).

3. Производная произведения двух функций:

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

4. Производная частного двух функций:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

5. Производная сложной функции:

Пусть $y=f(u)$, $u=g(x)$, тогда $y=f\left(g(x)\right)$ - сложная функция. Если $y=f(u)$ и $u=g(x)$ имеют производные, то производная сложной функции вычисляется по формуле:

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x).$$

Вышеприведенное правило остается справедливым и в случае, когда сложная функция состоит из любого конечного числа простых функций. Таким образом, производная сложной функции равна произведению производных от всех составляющих ее функций. Данное правило иногда называют *правилом цепочки*. При этом следует помнить, что каждую функцию нужно дифференцировать по ее собственному аргументу.

Таблица производных

Основные элементарные функции	Сложные функции
Константа $f(x)=C$ $(C)'=0$	
Степенная функция $f(x)=x^p$ $\left(x^p\right)'=p\cdot x^{p-1}$ В частности, $(x)'=1 \quad \left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	$\left(u^p\right)'=p\cdot u^{p-1}\cdot u'$ В частности, $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u' \quad \left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}\cdot u'$
Тригонометрические функции $(\sin x)'=\cos x$ $(\cos x)'=-\sin x$ $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$ $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$ $(\operatorname{tg} u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$ $(\operatorname{ctg} u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
Показательная функция $\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a$ В частности, $\left(e^x\right)'=e^x$	$\left(a^u\right)'=a^u\ln a\cdot u'$ В частности, $\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'$
Логарифмическая функция $\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$ В частности, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$\left(\log_a u\right)'=\frac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$ В частности, $(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$

Обратные тригонометрические функции	
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Дифференцирование рациональных функций

2.1. Найдите производные следующих функций:

1) $f(x) = x^8 - 3x^4 - x + 5$

2) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 - 3(x+1)$

3) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x\sqrt{3} + 2^{\sqrt{2}}$

4) $f(x) = \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}$

5) $f(x) = \left(x^4 + \frac{1}{x^3}\right) \cdot x^4$

6) $f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{2x}$

7) $f(x) = 2|x| + 1$

8) $f(x) = x|x|$

Решение:

1) $f(x) = x^8 - 3x^4 - x + 5$

Используя правила 1 и 2, а так же формулу $\left(x^p\right)' = p \cdot x^{p-1}$, получим:

$$f'(x) = \left(x^8\right)' - 3\left(x^4\right)' - (x)' + (5)' = 8x^7 - 3 \cdot 4x^3 - 1 + 0 = 8x^7 - 12x^3 - 1.$$

2) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 - 3(x+1)$

$$f'(x) = \frac{1}{5} \cdot \left(x^5\right)' - \frac{2}{3} \cdot \left(x^3\right)' - 3 \cdot (x+1)' = \frac{1}{5} \cdot 5x^4 - \frac{2}{3} \cdot 3x^2 - 3 \cdot 1 = x^4 - 2x^2 - 3.$$

3) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x\sqrt{3}+2^{\sqrt{2}}$

Учитывая, что $2^{\sqrt{2}}$ – const, получим:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(x^2\right)'-\sqrt{3}\cdot(x)'+\left(2^{\sqrt{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot 2x-\sqrt{3}\cdot 1+0=x-\sqrt{3}.$$

4) $f(x)=\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}=\frac{4}{x}-4\cdot x^{-2}$

$$f'(x)=\left(\frac{4}{x}\right)'-4\cdot\left(x^{-2}\right)'=-\frac{4}{x^2}-4\cdot(-2)\cdot x^{-3}=-\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}.$$

5) $f(x)=\left(x^4+\frac{1}{x^3}\right)\cdot x^4$

Очень часто в заданиях на вычисление производной, бывает удобнее сначала преобразовать выражение, задающее функцию, а потом дифференцировать.

Если раскроем скобки, то получим: $f(x)=x^8+x$.

Тогда $f'(x)=8x^7+1$.

6) $f(x)=\frac{x^2+x-3}{2x}$

Производную данной функции можно было бы найти по правилу 4:

$$f'(x)=\frac{\left(x^2+x-3\right)'\cdot 2x-\left(x^2+x-3\right)\cdot(2x)'}{(2x)^2}.$$

Но в данном случае такой подход не является рациональным. Удобнее найти производную после следующего преобразования исходной функции. Разделим почленно числитель на знаменатель:

$$f(x)=\frac{x^2+x-3}{2x}=\frac{x^2}{2x}+\frac{x}{2x}-\frac{3}{2x}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2x}.$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x)'+\left(\frac{1}{2}\right)'-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{2}+\frac{3}{2x^2}=\frac{x^2+3}{2x^2}.$$

7) По определению модуля:

$$f(x)=2|x|+1=\begin{cases}2x+1, & x\ge 0,\\ -2x+1, & x<0.\end{cases}$$

Тогда $f'(x)=\begin{cases}(2x+1)', & x>0,\\ (-2x+1)', & x<0;\end{cases}=\begin{cases}2, & x>0,\\ -2, & x<0.\end{cases}$

Отметим, что в точке $x=0$ функция $f(x)=2|x|+1$ производной не имеет, так как значение $f'(x)$ в окрестности данной точки однозначно не определено. Данная функция может служить примером непрерывной функции, не имеющей в некоторой точке производной.

8) $f(x)=x|x|=\begin{cases}x^2, & x\ge 0,\\ -x^2, & x<0.\end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases}(x^2)', & x\ge 0,\\ (-x^2)', & x<0;\end{cases}=\begin{cases}2x, & x\ge 0,\\ -2x, & x<0.\end{cases}$$

В этом случае производная функции $f(x)$ в точке $x=0$ существует и равна 0.

2.2. Найдите производные следующих функций в заданной точке x_0:

1) $f(x)=(x^2-1)(2-3x)$, $f'(2)-?$ 2) $f(x)=\dfrac{2-3x}{x-1}$, $x=2$

3) $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$, $f'(-2)-?$

Решение:

1) $f(x)=(x^2-1)(2-3x)=2x^2-2-3x^3+3x$

Найдем производную полученной функции:

$$f'(x)=(2x^2-2-3x^3+3x)'=4x-9x^2+3.$$

$$f'(2)=4\cdot 2-9\cdot 2^2+3=-25.$$

2) $f(x)=\dfrac{2-3x}{x-1}$

Используя правило дифференцирования 4, получим:

$$f'(x)=\left(\frac{2-3x}{x-1}\right)'=\frac{(2-3x)'\cdot(x-1)-(x-1)'\cdot(2-3x)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{-3\cdot(x-1)-1\cdot(2-3x)}{(x-1)^2}=\frac{-3x+3-2+3x}{(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}.$$

В точке $x=2$: $f'(2)=\frac{1}{(2-1)^2}=1$.

3) $f(x)=\frac{1}{|x|}=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x>0,\\ -\frac{1}{x}, & x<0.\end{cases}$ Тогда: $f'(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{x}\right)', & x>0,\\ \left(-\frac{1}{x}\right)', & x<0;\end{cases}=\begin{cases}-\frac{1}{x^2}, & x>0,\\ \frac{1}{x^2}, & x<0.\end{cases}$

Так как $x=-2<0$: $f'(-2)=\frac{1}{(-2)^2}=\frac{1}{4}$.

2.3. **Найдите производные сложных функций:**

1) $f(x)=\left(x^7-3x^4\right)^{120}$

2) $f(x)=\left(2x\cdot\sin\frac{\pi}{4}+1\right)^2$, $f'\left(\sqrt{2}\right)-?$

3) $f(x)=\frac{3}{x^2+x+1}$, $f'(1)-?$

4) $f(x)=\frac{1}{\left(x^2-1\right)^4}$

Решение:

1) $f(x)=\left(x^7-3x^4\right)^{120}$

В данную функцию входят две элементарные функции: $f(u)=u^{120}$ и $u(x)=x^7-3x^4$. По правилу дифференцирования сложной функции, получаем:

$$f'(x)=\left(\left(x^7-3x^4\right)^{120}\right)'=120\left(x^7-3x^4\right)^{119}\cdot\left(x^7-3x^4\right)'=$$

$$=120\left(x^7-3x^4\right)^{119}\left(7x^6-12x^3\right).$$

2) $f(x)=\left(2x\cdot\sin\frac{\pi}{4}+1\right)^2=\left(2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)^2=\left(x\sqrt{2}+1\right)^2$

$$f'(x)=\left(\left(x\sqrt{2}+1\right)^2\right)'=2\left(x\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(x\sqrt{2}+1\right)'=2\sqrt{2}\left(x\sqrt{2}+1\right)$$

$$f'\left(\sqrt{2}\right)=6\sqrt{2}\,.$$

3) $f(x)=\dfrac{3}{x^2+x+1}$

$$f'(x)=\left(\frac{3}{x^2+x+1}\right)'=3\cdot\frac{-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\cdot\left(x^2+x+1\right)'=-\frac{3(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=$$

$$=-\frac{6x+3}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$$ Тогда: $f'(1)=-\dfrac{6\cdot 1+3}{3^2}=-1$.

4) $f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)^4}=\left(x^2-1\right)^{-4}$

$$f'(x)=\left(\left(x^2-1\right)^{-4}\right)'=-4\left(x^2-1\right)^{-5}\cdot\left(x^2-1\right)'=-4\cdot\frac{1}{\left(x^2-1\right)^5}\cdot 2x=\frac{-8x}{\left(x^2-1\right)^5}.$$

Дифференцирование иррациональных функций

2.4. Найдите производные следующих функций:

1) $f(x)=2{,}5x^2+20\sqrt{x}-3\cdot\sqrt[3]{x}$ **2)** $f(x)=5x\cdot\sqrt[5]{x^4}-\left(\sqrt{\pi}\right)^3$

3) $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{\sqrt{x}}$ **4)** $f(x)=\dfrac{1}{4}\cdot\sqrt[4]{8x^3\cdot\sqrt{x}}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

Решение:

1) $f(x)=2{,}5x^2+20\sqrt{x}-3\cdot\sqrt[3]{x}$

$\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$, следовательно:

$$f'(x)=2{,}5\left(x^2\right)'+20\left(\sqrt{x}\right)'-3\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=2{,}5\cdot 2x+20\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-3\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=$$

$$=5x+\frac{10}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

2) $f(x)=5x\cdot\sqrt[5]{x^4}-\left(\sqrt{\pi}\right)^3=5x^1\cdot x^{\frac{4}{5}}-\left(\sqrt{\pi}\right)^3=5x^{\frac{9}{5}}-\left(\sqrt{\pi}\right)^3$

Учитывая, что $\left(\sqrt{\pi}\right)^3$ – const, получим:

$$f'(x)=5\left(x^{\frac{9}{5}}\right)'-\left(\left(\sqrt{\pi}\right)^3\right)'=5\cdot\frac{9}{5}\cdot x^{\frac{4}{5}}-0=9\cdot\sqrt[5]{x^4}.$$

3) Преобразуем выражение к виду, удобному для дифференцирования, разделив каждое слагаемое числителя на знаменатель:

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{\sqrt{x}}=\frac{x^2}{\sqrt{x}}+\frac{2x}{\sqrt{x}}=x\sqrt{x}+2\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'+2\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}+2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

4) $f(x)=\frac{1}{4}\cdot\sqrt[4]{8x^3\cdot\sqrt{x}}=\frac{1}{4}\cdot\sqrt[4]{8}\cdot\left(x^3\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt[4]{8}}{4}\cdot\left(x^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt[4]{8}}{4}\cdot x^{\frac{7}{8}}$

$$f'(x)=\left(\frac{\sqrt[4]{8}}{4}\cdot x^{\frac{7}{8}}\right)'=\frac{\sqrt[4]{8}}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot x^{-\frac{1}{8}}=\frac{7\cdot\sqrt[4]{8}}{32\cdot\sqrt[8]{x}}.$$

5) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}=x^{-\frac{2}{3}}+x^{-\frac{3}{4}}$

$$f'(x)=\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)'+\left(x^{-\frac{3}{4}}\right)'=-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}-\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}=-\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x^5}}-\frac{3}{4\cdot\sqrt[4]{x^7}}=$$

$$=-\frac{2}{3x\cdot\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{4x\cdot\sqrt[4]{x^3}}=-\frac{2\cdot\sqrt[3]{x}}{3x^2}-\frac{3\cdot\sqrt[4]{x}}{4x^2}=-\frac{8\cdot\sqrt[3]{x}+9\cdot\sqrt[4]{x}}{12x^2}.$$

1.5. Найдите производные сложных функций:

1) $f(x)=x^3\cdot\sqrt{x-1}$, $f'(2)-?$

2) $f(x)=\sqrt{5-x^2}+\dfrac{1}{(3-x)^2}$, $f'(2)-?$

3) $f(x)=\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}$

4) $f(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

Решение:

1) $f(x)=x^3\cdot\sqrt{x-1}=\sqrt{x^6(x-1)}=\sqrt{x^7-x^6}$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^7-x^6}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^7-x^6}}\cdot\left(x^7-x^6\right)'=\frac{7x^6-6x^5}{2\sqrt{x^7-x^6}}=$$

$$=\frac{x^5(7x-6)}{2x^3\sqrt{x-1}}=\frac{7x^3-6x^2}{2\sqrt{x-1}}$$

$f'(2)=16$.

2) $f(x)=\sqrt{5-x^2}+\dfrac{1}{(3-x)^2}=\sqrt{5-x^2}+(3-x)^{-2}$

$$f'(x)=\left(\sqrt{5-x^2}\right)'+\left((3-x)^{-2}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{5-x^2}}\cdot\left(5-x^2\right)'+$$

$$+(-2)(3-x)^{-3}\cdot(3-x)'=\frac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}}-\frac{2(-1)}{(3-x)^3}=-\frac{x}{\sqrt{5-x^2}}+\frac{2}{(3-x)^3}.$$

$f'(2)=-2+2=0$.

3) $f(x)=\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}=\left(x^3+1\right)^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x)=\left(\left(x^3+1\right)^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}\left(x^3+1\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(x^3+1\right)'=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\cdot3x^2=\frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}.$$

4) $f(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$f'(x)=\frac{(2x-1)'\cdot\sqrt{x^2+1}-\left(\sqrt{x^2+1}\right)'(2x-1)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{2\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'\cdot(2x-1)}{x^2+1}=$$

$$=\frac{2\sqrt{x^2+1}-\frac{2x^2-x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\frac{2\left(x^2+1\right)-2x^2+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{x+2}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}=\frac{x+2}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+1\right)}}$$

$$=\frac{x+2}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}.$$

Дифференцирование тригонометрических функций

2.6. Найдите производные следующих функций:

1) $f(x)=2\cos x-\frac{\left(\sqrt{\pi}\right)^3}{\sqrt{x}}+\frac{\pi}{2}$

2) $f(x)=\sqrt{3}\cos x+\cos\frac{\pi}{3}+\frac{3}{\pi}x^2,\quad x=\frac{\pi}{3}$

3) $f(x)=\sin x\cdot\sqrt{2x}+2x+3,\quad x=\frac{\pi}{2}$

4) $f(x)=\frac{tgx}{x}$ **5)** $f(x)=\frac{tgx+1}{tgx}$

Решение:

1) $f(x)=2\cos x-\frac{\left(\sqrt{\pi}\right)^3}{\sqrt{x}}+\frac{\pi}{2}$

Учитывая, что $\left(\sqrt{\pi}\right)^3$ - числовой коэффициент, а $\frac{\pi}{2}$ -константа, получаем:

$$f'(x)=2(\cos x)'-\left(\sqrt{\pi}\right)^3\cdot\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'+\left(\frac{\pi}{2}\right)'=-2\sin x-\left(\sqrt{\pi}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)+0=$$

$$=-2\sin x+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\pi}\right)^3\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^3}=-2\sin x+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi^3}{x^3}}.$$

2) $f(x)=\sqrt{3}\cos x+\cos\frac{\pi}{3}+\frac{3}{\pi}x^2$

$$f'(x)=\sqrt{3}(\cos x)'+\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)'+\frac{3}{\pi}\left(x^2\right)'=-\sqrt{3}\sin x+0+\frac{3}{\pi}\cdot 2x=$$

$$=-\sqrt{3}\sin x+\frac{6x}{\pi}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\frac{6}{\pi}\cdot\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+2=\frac{1}{2}.$$

3) $f(x)=\sin x\cdot\sqrt{2x}+2x+3$

$$f'(x)=(\sin x)'\cdot\sqrt{2x}+\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'\cdot\sin x+(2x)'+(3)'=$$

$$=\cos x\cdot\sqrt{2x}+\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x+2+0=\sqrt{2x}\cos x+\frac{\sin x}{\sqrt{2x}}+2$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot\cos\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2\cdot\frac{\pi}{2}}}+2=0+\frac{1}{\sqrt{\pi}}+2=\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}+2.$$

4) $f(x)=\frac{tgx}{x}$

$$f'(x)=\frac{(tgx)'\cdot x-tgx\cdot x'}{x^2}=\frac{\frac{x}{\cos^2 x}-tgx}{x^2}=\frac{\frac{x}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos x}}{x^2}=\frac{\frac{x-\sin x\cos x}{\cos^2 x}}{x^2}=$$

$$=\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cdot\cos^2 x}.$$

5) $f(x)=\frac{tgx+1}{tgx}=\frac{tgx}{tgx}+\frac{1}{tgx}=1+ctgx$

$$f'(x)=(1+ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

2.7. Найдите производные сложных функций:

1) $f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{x+\pi^2}{x}$, $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$ – ?

2) $f(x)=\sin^4 x-\cos^4 x$, $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$ – ?

3) $f(x)=\sin^2 x\cdot\cos^2 x$

4) $f(x)=\sin(\cos x)$

5) $h(x)=f(g(x))$, если $f(x)=tgx$, $g(x)=2x-3x^2$

6) $f(x)=ctg\left(\frac{x+1}{2}\right)$

7) $f(x)=\cos^2\left(\sqrt[3]{x}\right)$

8) $f(x)=\cos^3\frac{x}{3}+ctg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin^2\frac{\pi}{13}$, $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ – ?

Решение:

1) Преобразуем первое слагаемое функции $f(x)$ с помощью формулы приведения, а второе - делением числителя на знаменатель:

$$f(x)=3\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)-\frac{x+\pi^2}{x}=3\cos 2x-\left(\frac{x}{x}+\frac{\pi^2}{x}\right)=3\cos 2x-1-\frac{\pi^2}{x}.$$

$$f'(x)=3(\cos 2x)'-(1)'-\pi^2\left(\frac{1}{x}\right)'=3(-\sin 2x)\cdot(2x)'-0-\pi^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=-6\sin 2x+\left(\frac{\pi}{x}\right)^2$$

$$f'\left(\frac{\pi}{12}\right)=-6\sin\frac{\pi}{6}+12^2=-3+144=141.$$

2) $f(x)=\sin^4 x-\cos^4 x=\underbrace{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}_{1}\underbrace{\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)}_{-\cos 2x}=-\cos 2x$

$$f'(x)=-(\cos 2x)'=-(-\sin 2x)\cdot(2x)'=2\sin 2x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}=1.$$

3) $f(x)=\sin^2 x\cdot\cos^2 x$

Упростим исходную функцию:

$$f(x)=\frac{(2\sin x\cdot\cos x)^2}{4}=\frac{\sin^2 2x}{4}=\frac{1-\cos 4x}{4\cdot 2}=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4x$$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4x\right)'=-\frac{1}{8}(\cos 4x)'=-\frac{1}{8}\cdot(-\sin 4x)\cdot(4x)'=\frac{1}{2}\sin 4x.$$

4) $f(x)=\sin(\cos x)$

$$f'(x)=(\sin(\cos x))'=\cos(\cos x)\cdot(\cos x)'=-\sin x\cdot\cos(\cos x).$$

5) $h(x)=f(g(x))=tg(2x-3x^2)$

$$h'(x)=\left(tg(2x-3x^2)\right)'=\frac{1}{\cos^2(2x-3x^2)}\cdot(2x-3x^2)'=\frac{2-6x}{\cos^2(2x-3x^2)}.$$

6) $f(x)=ctg\left(\frac{x+1}{2}\right)$

$$f'(x)=\left(ctg\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)'=-\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x+1}{2}\right)}\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right)'=-\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x+1}{2}\right)}\cdot\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)'=$$

$$=-\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x+1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2\sin^2\left(\frac{x+1}{2}\right)}.$$

7) $f(x)=\cos^2\left(\sqrt[3]{x}\right)$

При дифференцировании сложных функций очень важно правильно определить порядок следования промежуточных элементарных функций, входящих в данную сложную функцию. Так в функцию $f(x)=\cos^2\left(\sqrt[3]{x}\right)$ входят три элементарные функции в следующем порядке: 1) квадратичная $y=\left(\cos\left(\sqrt[3]{x}\right)\right)^2$, 2) тригонометрическая $u=\cos\left(\sqrt[3]{x}\right)$, 3) иррациональная $v=\sqrt[3]{x}$. Следовательно, производная данной функции будет:

$$f'(x)=2\cos\sqrt[3]{x}\cdot\left(\cos\sqrt[3]{x}\right)'=2\cos\sqrt[3]{x}\cdot\left(-\sin\sqrt[3]{x}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right)'=$$

$$=-\underbrace{2\cos\sqrt[3]{x}\cdot\sin\sqrt[3]{x}}_{\sin\left(2\sqrt[3]{x}\right)}\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\cdot\sin\left(2\sqrt[3]{x}\right)=-\frac{\sqrt[3]{x}\cdot\sin\left(2\sqrt[3]{x}\right)}{3x}.$$

8) $f(x)=\cos^3\frac{x}{3}+ctg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin^2\frac{\pi}{13}=\left(\cos\frac{x}{3}\right)^3+ctg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin^2\frac{\pi}{13}$

$$f'(x)=\left(\left(\cos\frac{x}{3}\right)^3\right)'+\left(ctg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)'+\underbrace{\left(\sin^2\frac{\pi}{13}\right)'}_{0}=3\cos^2\frac{x}{3}\cdot\left(\cos\frac{x}{3}\right)'-$$

$$\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\cdot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)'=3\cos^2\frac{x}{3}\cdot\left(-\sin\frac{x}{3}\right)\cdot\left(\frac{x}{3}\right)'-\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\cdot(-1)=$$

$$=-\cos^2\frac{x}{3}\cdot\sin\frac{x}{3}+\frac{1}{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}-\cos^2\frac{x}{3}\cdot\sin\frac{x}{3}$$

$$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}}-\cos^2\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}=1-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Дифференцирование показательной и логарифмической функций

2.8. Найдите производные следующих функций:

1) $f(x)=x\ln x+2^x$

2) $f(x)=x\log_2 x-\frac{e^x}{x}$

3) $f(x)=\frac{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}{3^x}$, $f'(0)-?$

4) $f(x)=\frac{\ln x\cdot\sin x}{3\cos x}$

5) $f(x)=\frac{x^2}{0{,}5^{1-2x}}+\ln\left(3x^2-x\right)$, $f'(1)-?$

6) $f(x)=e^{\sin 4x}+\frac{6}{e^{6x}}$, $f'(0)-?$

7) $f(x)=e^x\cdot\sin\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{4}$, $f'(\pi)-?$

8) $f(x)=\sqrt[x]{5}+5^{-2x}$

9) $f(x)=3^{\sin^2 x}$

10) $f(x)=\lg(ctgx)$

11) $f(x)=\ln\left(\ln x^2\right)$

12) $f(x)=\log_7\cos\sqrt{1+x}$

13) $f(x)=\ln^2\sin x$

14) $f(x)=\log_x 5$

Решение:

1) $f(x)=x\ln x+2^x$

$$f'(x)=(x)'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'+\left(2^x\right)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+2^x\cdot\ln 2=1+\ln x+2^x\ln 2.$$

2) $f(x)=x\log_2 x-\dfrac{e^x}{x}$

$$f'(x)=(x)'\cdot\log_2 x+x\cdot\left(\log_2 x\right)'-\frac{\left(e^x\right)'\cdot x-e^x\cdot(x)'}{x^2}=\log_2 x+x\cdot\frac{1}{x\ln 2}-$$

$$-\frac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}=\log_2 x+\frac{1}{\ln 2}-\frac{e^x(x-1)}{x^2}=\frac{\ln x}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 2}-\frac{e^x(x-1)}{x^2}=$$

$$=\frac{\ln x+1}{\ln 2}-\frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

3) $f(x)=\dfrac{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}{3^x}=3\cdot\dfrac{2^x}{3^x}+4\cdot\dfrac{3^x}{3^x}=3\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+4$

$$f'(x)=3\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)'+(4)'=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x\ln\frac{2}{3}$$

$$f'(0)=3\left(\frac{2}{3}\right)^0\ln\frac{2}{3}=3\ln\frac{2}{3}.$$

4) $f(x)=\dfrac{\ln x\cdot\sin x}{3\cos x}=\dfrac{1}{3}\ln x\cdot tgx$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left((\ln x)'\cdot tgx+(tgx)'\cdot\ln x\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{tgx}{x}+\frac{\ln x}{\cos^2 x}\right).$$

5) $f(x)=\dfrac{x^2}{0{,}5^{1-2x}}+\ln\left(3x^2-x\right)=\dfrac{x^2}{2^{2x-1}}+\ln\left(3x^2-x\right)=$

$=x^2\cdot 2^{1-2x}+\ln\left(3x^2-x\right)$

$$f'(x)=\left(x^2\right)'\cdot 2^{1-2x}+x^2\cdot\left(2^{1-2x}\right)'+\frac{1}{3x^2-x}\cdot\left(3x^2-x\right)'=2x\cdot 2^{1-2x}+$$

$$+x^2\cdot 2^{1-2x}\cdot\ln 2\cdot(-2)+\frac{6x-1}{3x^2-x}=2^{1-2x}\cdot\left(2x-2x^2\cdot\ln 2\right)+\frac{6x-1}{3x^2-x}$$

$$f'(1)=2^{-1}\cdot(2-2\ln 2)+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}-\ln 2$$

6) $f(x)=e^{\sin 4x}+\dfrac{6}{e^{6x}}=e^{\sin 4x}+6\cdot e^{-6x}$

$$f'(x)=\left(e^{\sin 4x}\right)'+6\left(e^{-6x}\right)'=e^{\sin 4x}\cdot(\sin 4x)'+6\left(e^{-6x}\right)\cdot(-6x)'=$$

$$=e^{\sin 4x}\cdot\cos 4x\cdot(4x)'+\frac{6}{e^{6x}}\cdot(-6)=4e^{\sin 4x}\cdot\cos 4x-\frac{36}{e^{6x}}$$

$$f'(0)=4e^{0}-\frac{36}{e^{0}}=-32.$$

7) $f(x)=e^{x}\cdot\sin\dfrac{x}{4}\cdot\cos\dfrac{x}{4}=\dfrac{1}{2}e^{x}\cdot\sin\dfrac{x}{2}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}\cdot\sin\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{2}\left(\left(e^{x}\right)'\cdot\sin\frac{x}{2}+\left(\sin\frac{x}{2}\right)'\cdot e^{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{x}\cdot\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'\cdot e^{x}\right)=\frac{1}{2}e^{x}\left(\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$f'(\pi)=\frac{1}{2}e^{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{\pi}.$$

8) $f(x)=\sqrt[x]{5}+5^{-2x}=5^{\frac{1}{x}}+5^{-2x}$

$$f'(x)=\left(5^{\frac{1}{x}}\right)'+\left(5^{-2x}\right)'=\left(5^{\frac{1}{x}}\right)\cdot\ln 5\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'+\left(5^{-2x}\right)\cdot\ln 5\cdot(-2x)'=$$

$$=\left(5^{\frac{1}{x}}\right)\cdot\ln 5\cdot\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)+\left(5^{-2x}\right)\cdot\ln 5\cdot(-2)=-\ln 5\left(2\cdot 5^{-2x}+5^{\frac{1}{x}}\cdot x^{-2}\right).$$

9) $f(x)=3^{\sin^{2}x}$

$$f'(x)=3^{\sin^{2}x}\ln 3\cdot\left(\sin^{2}x\right)'=3^{\sin^{2}x}\ln 3\cdot 2\sin x\cdot(\sin x)'=$$

$$=3^{\sin^{2}x}\ln 3\cdot 2\sin x\cdot\cos x=3^{\sin^{2}x}\ln 3\cdot\sin 2x.$$

10) $f(x)=\lg(ctgx)$

$$f'(x)=\frac{1}{ctgx\cdot\ln 10}\cdot(ctgx)'=\frac{\sin x}{\cos x\cdot\ln 10}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^{2}x}\right)=\frac{-2}{2\cos x\sin x\cdot\ln 10}=$$

$$=\frac{-2}{\sin 2x\cdot\ln 10}.$$

11) $f(x)=\ln\left(\ln x^2\right)$

$$f'(x)=\frac{1}{\left(\ln x^2\right)}\cdot\left(\ln x^2\right)'=\frac{1}{\left(\ln x^2\right)}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\left(x^2\right)'=\frac{1}{\left(\ln x^2\right)}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x=\frac{2}{x\ln x^2}.$$

12) $f(x)=\log_7\cos\sqrt{1+x}$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos\sqrt{1+x}\cdot\ln 7}\cdot\left(\cos\sqrt{1+x}\right)'=\frac{1}{\cos\sqrt{1+x}\cdot\ln 7}\cdot\left(-\sin\sqrt{1+x}\right)\times$$

$$\times\left(\sqrt{1+x}\right)'=\frac{-tg\sqrt{1+x}}{\ln 7}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{-tg\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}\cdot\ln 7}$$

13) $f(x)=\ln^2\sin x$

$$f'(x)=2\ln\sin x\cdot(\ln\sin x)'=2\ln\sin x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=2\ln\sin x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=$$

$$=2ctgx\cdot\ln\sin x.$$

14) $f(x)=\log_x 5=\frac{1}{\log_5 x}=\left(\log_5 x\right)^{-1}$

$$f'(x)=\left(\left(\log_5 x\right)^{-1}\right)'=-1\cdot\left(\log_5 x\right)^{-2}\left(\log_5 x\right)'=\frac{-1}{\log_5^2 x}\cdot\frac{1}{x\ln 5}=-\frac{\log_x^2 5}{x\ln 5}.$$

Рассмотрим сложно показательные функции вида $y=f(x)^{g(x)}$.

2.9. Найдите производную функций:

1) $y=x^x$ **2)** $y=x^{\cos x}$ **3)** $y=x^{\frac{1}{x}}$

Решение:

1) $y=x^x$

1 способ. Так как, $y=x^x=\left(e^{\ln x}\right)^x=e^{x\cdot\ln x}$, то:

$$y'=e^{x\cdot\ln x}\cdot(x\cdot\ln x)'=e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$$

2 способ. Логарифмируем исходную функцию:

$\ln y = \ln x^x$; $\ln y = x \cdot \ln x$.

Дифференцируем обе части данного выражения по x и, считая, что функция $\ln y(x)$ является сложной функцией, получаем:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + 1 ; \qquad y' = y(\ln x + 1) ; \qquad y' = x^x (\ln x + 1).$$

2) $y = x^{\cos x}$

Так как $y = x^{\cos x} = \left(e^{\ln x}\right)^{\cos x} = e^{\cos x \cdot \ln x}$, то

$$y' = e^{\cos x \cdot \ln x}\left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \cos x\right) = x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \ln x\right).$$

3) $y = x^{\frac{1}{x}}$

Логарифмируем: $\ln y = \ln x^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \ln x$.

Берем производную: $\frac{1}{y} \cdot y' = -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2}$.

$$y' = y\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \ln x\right) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}(1 - \ln x) = x^{\frac{1}{x} - 2} \cdot (1 - \ln x).$$

Дифференцирование обратных тригонометрических функций

2.10. Найдите производные следующих функций:

1) $f(x) = \arcsin 5x$

2) $f(x) = \arccos x^3$

3) $f(x) = \operatorname{arctg} 3x^2$

4) $f(x) = \operatorname{arcctg} e^x$

5) $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{x}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{x}$

$f'(1) - ?$

Решение:

1) $f(x) = \arcsin 5x$

$$f'(x) = (\arcsin 5x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - (5x)^2}} \cdot (5x)' = \frac{5}{\sqrt{1 - 25x^2}} .$$

2) $f(x) = \arccos x^3$

$$f'(x)=\left(\arccos x^3\right)'=-\frac{\left(x^3\right)'}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}}=-\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}.$$

3) $f(x)=\operatorname{arctg}3x^2$

$$f'(x)=\left(\operatorname{arctg}3x^2\right)'=\frac{\left(3x^2\right)'}{1+\left(3x^2\right)^2}=\frac{6x}{1+9x^4}.$$

4) $f(x)=\operatorname{arcctg}e^x$

$$f'(x)=\left(\operatorname{arcctg}e^x\right)'=-\frac{1}{1+\left(e^x\right)^2}\cdot\left(e^x\right)'=-\frac{e^x}{1+e^{2x}}.$$

5) $f(x)=\operatorname{arcctg}\frac{x}{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}$

$$f'(x)=\left(\operatorname{arcctg}\frac{x}{2}\right)'-\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)'=-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'-\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=$$

$$=-\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x^2}{4}}-\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{2}{4+x^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

$$f'(1)=-\frac{2}{5}-\frac{1}{4}=-\frac{13}{20}.$$

Рассмотрим несколько задач, связанных с нахождением производной.

2.11. Составьте и решите неравенство:

$$\frac{f(x)}{f'(x)} \geq 0, \text{ если } f(x) = x^4 - 4x^2.$$

Решение:

$$f'(x) = 4x^3 - 8x$$

Составим неравенство и решим его методом интервалов:

$$\frac{x^4 - 4x^2}{4x^3 - 8x} \geq 0$$

$$\frac{x^2(x-2)(x+2)}{4x\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)} \geq 0$$

Ответ: $x \in \left[-2; -\sqrt{2}\right) \cup \left(0; \sqrt{2}\right) \cup [2; \infty)$.

2.12. Составьте и решите уравнение:

$$f'(x) = f'(5) - f'(1), \text{ если } f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}.$$

Решение:

$$f'(x) = \frac{\left(x^2 - 2x + 1\right)' \cdot (x-3) - (x-3)' \cdot \left(x^2 - 2x + 1\right)}{(x-3)^2} =$$

$$= \frac{(2x-2)(x-3) - \left(x^2 - 2x + 1\right)}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2}$$

$f'(5) = 0$, $f'(1) = 0$

Получим уравнение:

$$\frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2} = 0 \qquad \text{ОДЗ: } x \neq 3.$$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$x_1 = 5$, $x_2 = 1$.

Ответ: $\{1; 5\}$.

2.13. Решите неравенство: $f'(x)\cdot g'(x)\le 5$,

если $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+x+7$, $g(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x$.

Решение:

Найдем производные: $f'(x)=x^2+2x+1$, $g'(x)=x^2+2x-3$.

Составим и решим неравенство:

$$\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2+2x-3\right)\le 5$$

Введем замену: $a=x^2+2x+1$

$$a(a-4)-5\le 0$$

$$a^2-4a-5\le 0$$

$$(a-5)(a+1)\le 0$$

$$\left(x^2+2x-4\right)\underbrace{\left(x^2+2x+2\right)}_{D<0}\le 0$$

$$x^2+2x-4\le 0.$$

Ответ: $\left[-1-\sqrt{5};\ -1+\sqrt{5}\right]$.

2.14. На кривой $y=x^2-3x+5$ найдите точку, в которой ордината y возрастает в 5 раз быстрее, чем абсцисса x.

Решение:

Найдем производную: $y'=2x-3$.

Так как производная характеризует скорость изменения ординаты y по сравнению с изменением абсциссы x, то из условия $y'=2x-3=5$ находим абсциссу искомой точки: $x=4$.

Тогда ордината точки: $y(4)=4^2-3\cdot 4+5=9$.

Ответ: $(4;9)$.

2.15. Дан функции $f(x)=x^2-x$ и $g(x)=x^2+x$. Требуется установить:

1) при каком значении аргумента x функция $f(x)$ возрастает в 2 раза быстрее, чем $g(x)$;

2) существует ли такое значение x, при котором функции изменяются с одинаковой скоростью?

Решение:

Найдем производные: $f'(x)=2x-1$, $g'(x)=2x+1$.

1) Согласно условию, должно выполняться равенство:
$2x-1=2(2x+1)$.

Решая данное уравнение, находим $x=-\frac{3}{2}$.

2) Уравнение $2x-1=2x+1$ корней не имеет, следовательно, таких значений x не существует.

2.16. Известно, что для функции $f(x)=a\sin 4x+b\cos 2x$ при некоторых значениях a и b выполняются равенства $f'\left(\frac{7\pi}{12}\right)=4$, $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2$. Найдите значение выражения $4ab$.

Решение:

Найдем производную: $f'(x)=4a\cos 4x-2b\sin 2x$.

Вычислим значения $f'\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ и $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)$:

$$f'\left(\frac{7\pi}{12}\right)=4a\cos\frac{7\pi}{3}-2b\sin\frac{7\pi}{6}=4a\cdot\frac{1}{2}-2b\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=2a+b;$$

$$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=4a\cos 3\pi-2b\sin\frac{3\pi}{2}=4a\cdot(-1)-2b\cdot(-1)=-4a+2b.$$

По условию задачи, можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases}2a+b=4,\\ -4a+2b=2;\end{cases}\qquad \begin{cases}2a+b=4,\\ -2a+b=1;\end{cases}\qquad \begin{cases}a=0,75,\\ b=2,5.\end{cases}$$

Искомое произведение: $4ab=7,5$.

Ответ: 7,5.

2.17. Найдите целое число, ближайшее к значению $f'\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, если $f(x)=tg(0,5\pi-x)$.

Решение:

$$f(x)=tg(0,5\pi-x)=tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=ctgx$$

Найдем производную: $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

$$f'\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sin^2\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{3}} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$$

Целое число, ближайшее к значению $\left(-1\frac{1}{3}\right)$ это (-1).

Ответ: -1.

2.18. Найдите точку x, в которой производная функции $f(x) = 2^{2x} + 2^x - 3x\ln 2 + 5$ обращается в нуль.

Решение:

Найдем производную: $f'(x) = 2^{2x}\ln 2\cdot 2 + 2^x\ln 2 - 3\ln 2$.

Составим и решим уравнение $f'(x) = 0$:

$2^{2x}\ln 2\cdot 2 + 2^x\ln 2 - 3\ln 2 = 0 \quad \big|:\ln 2 \neq 0$

$2\cdot 2^{2x} + 2^x - 3 = 0$

Замена: $t = 2^x$, $(t > 0)$.

$2t^2 + t - 3 = 0$

$t_1 = -\frac{3}{2}$ - посторонний корень

$t_2 = 1$

Получаем: $2^x = 1$ или $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

2.19. Найдите количество целых решений неравенства $f'(x) < g'(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 3]$, если $f(x) = \frac{x^3+1}{x}$, $g(x) = 5x + \frac{1}{x}$.

Решение:

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x} = \frac{x^3}{x} + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x}$$

Найдем производные:

$$f'(x)=2x-\frac{1}{x^2}, \quad g'(x)=5-\frac{1}{x^2}.$$

Составим и решим неравенство: $2x-\frac{1}{x^2}<5-\frac{1}{x^2}$.

Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x\neq 0, \\ 2x<5. \end{cases}$$

$x\in(-\infty;0)\cup(0;2,5)$

Целыми решениями неравенства, принадлежащими отрезку $[-2;3]$, являются $\{-2;-1;1;2\}$. Их количество 4.

Ответ: 4.

2.20. О функции $f(x)$ известно, что она четная, $f(1)=4$ и, кроме того, $f'(-1)=-3$. Найдите $g'(1)$, где $g(x)=x^2\cdot f\left(-\frac{1}{x}\right)$.

Решение:

Найдем производную функции $g(x)$:

$$g'(x)=\left(x^2\right)'\cdot f\left(-\frac{1}{x}\right)+x^2\cdot f'\left(-\frac{1}{x}\right)=2x\cdot f\left(-\frac{1}{x}\right)+x^2\cdot f'\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)'=$$

$$=2x\cdot f\left(-\frac{1}{x}\right)+f'\left(-\frac{1}{x}\right).$$

Тогда:

$$g'(1)=2\cdot 1\cdot f\left(-\frac{1}{1}\right)+f'\left(-\frac{1}{1}\right)=2f(-1)+f'(-1)$$

Так как по условию $f(x)$ - четная функция:

$f(-1)=f(1)=4$.

Окончательно, получаем: $g'(1)=2\cdot 4+(-3)=5$.

Ответ: 5.

§3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРОИЗВОДНОЙ

Критические точки

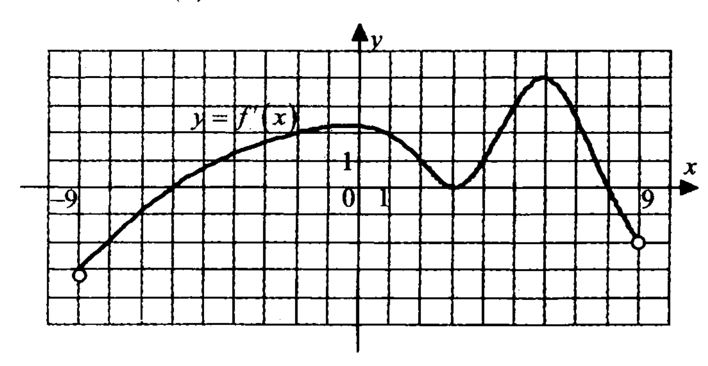
Окрестностью точки x_0 называется интервал вида $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$ - некоторое число.

Точка x_0 называется *внутренней точкой* множества X, если найдется окрестность этой точки, целиком лежащая в X.

Определение 1. Точка x_0 называется ***критической точкой*** функции, если она является внутренней точкой области определения функции, в которой ее производная равна нулю или не существует (производная не существует в точках разрыва и в точках излома функции).

В соответствии с определением 1 *граничные точки области определения функции не могут быть критическими, поскольку они не являются внутренними.*

3.1. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, заданной на промежутке $(-9; 9)$. Найдите сумму критических точек функции $y = f(x)$.



Решение:

Критическими точками являются внутренние точки интервала $(-9; 9)$, в которых производная равна нулю или не существует. На графике такими точками являются: $x_1 = -6$, $x_2 = 3$, $x_3 = 8$. Их сумма равна 5.

Ответ: 5.

3.2. Найдите критические точки функций:

1) $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2$ 2) $f(x)=x^2+\frac{16}{x}$

3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}$ 4) $f(x)=\sqrt{x^2-6x}$

5) $f(x)=\frac{x^2}{2}-6\ln(x-1)$ 6) $f(x)=2^x+4^{-x}$

7) $f(x)=x^3+3|x|$ 8) $f(x)=\sin 2x+2\cos x-2x$

9) $f(x)=\sin 2x+6\sin x-2x$, найдите критические точки, принадлежащие интервалу $0\le x\le 2\pi$.

Решение:

1) $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2$

$D(f)=(-\infty;\ \infty)$

Найдем производную: $f'(x)=\frac{1}{4}\cdot 4x^3-\frac{1}{3}\cdot 3x^2-2x=x^3-x^2-2x$

Найдем нули производной, то есть решим уравнение $f'(x)=0$.

$x^3-x^2-2x=0$

$x(x^2-x-2)=0$

$x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=-1$

Ответ: $\{-1;\ 0;\ 2\}$.

2) $f(x)=x^2+\frac{16}{x}$

$D(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$

$f'(x)=2x-\frac{16}{x^2}=\frac{2x^3-16}{x^2}$

$f'(x)=0$: $2x^3-16=0$

$x^3=8$; $x=2$

Производная равна нулю в точке $x=2$.

Производная не существует в точке $x=0$, но данная точка не принадлежит $D(f)$, следовательно, не критическая.

Ответ: $x=2$.

3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}$

$D(f)=(-\infty;\ \infty)$

Найдем производную: $f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{x}-1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

В критических точках производная не существует или равна 0, это точки $x_1=0$ и $x_2=\dfrac{1}{8}$.

Ответ: $\left\{0;\ \dfrac{1}{8}\right\}$.

4) $f(x)=\sqrt{x^2-6x}$

$D(f)=(-\infty;\ 0]\cup[6;\ \infty)$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-6x}}\cdot\left(x^2-6x\right)'=\frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x}}=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x}}$$

$f'(x)=0:\quad x-3=0,\quad x=3\notin D(f)$.

$f'(x)$ не существует в точках $x=0$ и $x=6$, но они не являются внутренними точками области определения (это граничные точки), следовательно, данные точки не могут быть критическими.

Ответ: функция не имеет критических точек.

5) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-6\ln(x-1)$

$D(f)=(1;\ \infty)$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2x-6\cdot\frac{1}{x-1}\cdot(x-1)'=x-\frac{6}{x-1}=\frac{x^2-x-6}{x-1}$$

Нули производной:

$x^2-x-6=0$

$x_1=3\in D(f),\quad x_2=-2\notin D(f)$

Точки разрыва производной: $x = 1 \notin D(f)$.

Из трех полученных точек только $x = 3$ является внутренней точкой области определения исходной функции.

Ответ: $x = 3$.

6) $f(x) = 2^x + 4^{-x}$

$D(f) = (-\infty;\ \infty)$

$f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 - 4^{-x} \cdot \ln 4 = 2^x \cdot \ln 2 - 2^{-2x} \cdot 2\ln 2 = 2^x \cdot \ln 2 - 2^{-2x+1} \cdot \ln 2$

$f'(x) = 0: \qquad 2^x \cdot \ln 2 - 2^{-2x+1} \cdot \ln 2 = 0$

$$2^x \cdot \ln 2\left(1 - 2^{-3x+1}\right) = 0$$

$$2^{-3x+1} = 1; \quad -3x + 1 = 0, \quad x = \frac{1}{3}$$

Ответ: $x = \dfrac{1}{3}$.

7) $f(x) = x^3 + 3|x|$

$D(f) = (-\infty;\ \infty)$

По определению модуля: $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x, & x \ge 0 \\ x^3 - 3x, & x < 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3, & x > 0 \\ 3x^2 - 3, & x < 0 \end{cases}$$

Функция $f(x) = x^3 + 3|x|$ дифференцируема всюду, кроме точки $x = 0$, то есть данная точка является критической.

Другие критические точки найдем, приравняв производную к нулю с учетом неравенств:

1) $x > 0$	2) $x < 0$
$3x^2 + 3 = 0$	$3x^2 - 3 = 0$
решений нет	$x_1 = 1 > 0$ - посторонний корень,
	$x_2 = -1$

Ответ: $\{-1;\ 0\}$.

8) $f(x)=\sin 2x+2\cos x-2x$

$D(f)=(-\infty;\ \infty)$.

$f'(x)=2\cos 2x-2\sin x-2=2-4\sin^2 x-2\sin x-2=-4\sin^2 x-2\sin x$

$f'(x)=0:\qquad -4\sin^2 x-2\sin x=0$

$$\sin x(2\sin x+1)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=-\dfrac{1}{2};\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: πn; $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k$, $n,k\in\mathbb{Z}$.

9) $f(x)=\sin 2x+6\sin x-2x$

$D(f)=(-\infty;\ \infty)$

$f'(x)=2\cos 2x+6\cos x-2$

$f'(x)=0:\qquad 2\cos 2x+6\cos x-2=0$

$$\cos 2x+3\cos x-1=0$$

$$\left(2\cos^2 x-1\right)+3\cos x-1=0$$

$$2\cos^2 x+3\cos x-2=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=-2,\\ \cos x=\dfrac{1}{2};\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\text{решений нет},\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Найдем критические точки, принадлежащие интервалу $0\le x\le 2\pi$:

$k=0$:	$x_1=\dfrac{\pi}{3}$, $x_2=-\dfrac{\pi}{3}\notin[0;\ 2\pi]$
$k=1$:	$x_3=\dfrac{\pi}{3}+2\pi=\dfrac{7\pi}{3}\notin[0;\ 2\pi]$, $x_4=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi=\dfrac{5\pi}{3}$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

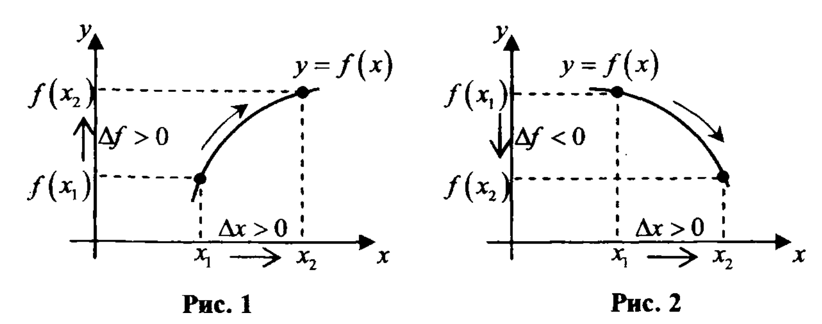


Рис. 1 **Рис. 2**

Определение 2. Функция $f(x)$ называется ***возрастающей*** на промежутке X, если в точках этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. для любых x_1 и x_2 из X, таких, что $x_2>x_1$, выполнено неравенство $f(x_2)>f(x_1)$ (Рис. 1).

Определение 3. Функция $f(x)$ называется ***убывающей*** на промежутке X, если в точках этого промежутка большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т.е. для любых x_1 и x_2 из X, таких, что $x_2>x_1$, выполнено неравенство $f(x_2)<f(x_1)$ (Рис. 2).

Промежутки возрастания и убывания функции объединяют общим термином – *промежутки монотонности функции.*

Теорема 1. Если во всех точках промежутка X выполняется неравенство $f'(x)>0$, то функция $y=f(x)$ возрастает на промежутке X.

Теорема 2. Если во всех точках промежутка X выполняется неравенство $f'(x)<0$, то функция $y=f(x)$ убывает на промежутке X.

Таким образом, возрастание или убывание функции $y=f(x)$ определяется знаком производной этой функции. Обратное утверждение так же верно, оно выражается следующей теоремой:

Теорема 3. Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X, то производная этой функции не отрицательна (не положительна) на этом промежутке.

Схема нахождения промежутков монотонности

1. Найти область определения функции.

2. Найти производную и критические точки функции.

3. Отметить критические точки на числовой прямой, т.е. разбить область определения функции на интервалы, на каждом из которых производная функции сохраняет знак.

Установить знак производной на получившихся промежутках и сделать вывод о монотонности функции.

Замечание.

Решение уравнения $f'(x)=0$ дает критические точки, которые присоединяются к промежуткам монотонности.

3.3. На каком из следующих рисунков изображен график функции, возрастающей на промежутке $[-1; 2]$?

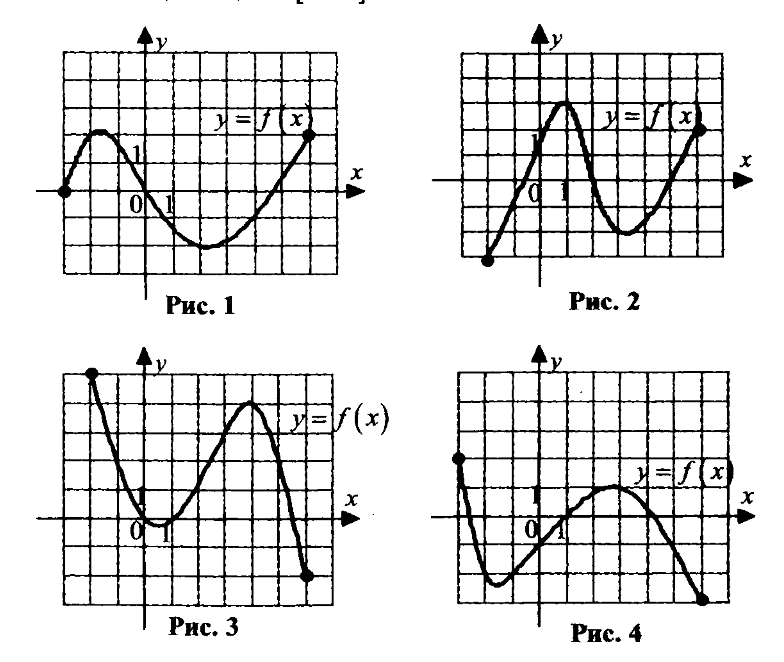


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3 Рис. 4

***Решение*:**

В первом случае на промежутке $[-1; 2]$ функция монотонно убывает.

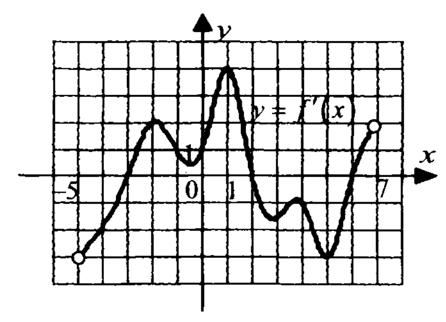
На рисунке 2 функция на отрезке $[-1; 1]$ возрастает, а на $[1; 2]$ убывает.

В третьем случае функция на промежутке $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$ убывает, а на $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ возрастает.

На рисунке 4 функция на промежутке $[-1; 2]$ монотонно возрастает.

Ответ: Рис. 4.

3.4. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 7)$. График ее производной изображен на рисунке. Найдите промежутки убывания функции $y = f(x)$. В ответе укажите наибольшую из длин этих промежутков.



Решение:

На основании теоремы 2:

$y = f'(x)$ отрицательна (график лежит ниже оси Ox) при $x \in (-5; -3)$ и $x \in (2; 6)$, следовательно, на этих интервалах функция убывает.

Длины этих интервалов 2 и 4 соответственно. Наибольшая длина: 4.

Ответ: 4.

3.5. Найдите интервалы возрастания функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Решение:

Проведем решение, по схеме, описанной выше.

1) Область определения $D(f)$:

$x^2 - 1 \geq 0$; $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$.

2) Производная заданной функции:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Нули первой производной: $x_1 = 0 \notin D(f)$

Точки разрыва производной: $x_{2,3} = \pm 1$.

Критических точек нет.

3) Определим знаки производной в области определения функции:

знак $f'(x)$ $-$] -1 0 1 [$+$ x

$f(x)$ ↘ ↗

Интервалом возрастания является тот, в котором производная положительна, т.е. $[1; \infty)$.

Ответ: $[1; \infty)$.

3.6. Найдите интервалы возрастания функции $f(x) = x - \sqrt{3-x}$.

Решение:

1) Область определения $D(f)$: $3 - x \geq 0$; $x \in (-\infty; 3]$.

2) $f'(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3-x}} \cdot (-1) = \frac{1}{2\sqrt{3-x}} + 1 = \frac{1+2\sqrt{3-x}}{2\sqrt{3-x}}$.

Нули производной:

$1 + 2\sqrt{3-x} = 0$

$\sqrt{3-x} = -\frac{1}{2}$

решений нет.

Точки разрыва производной: $x = 3$.

Данная точка является граничной точкой области определения функции $D(f)$, следовательно, критической точкой быть не может.

Таким образом, критических точек нет.

3) знак $f'(x)$ + ; $f(x)$ ↗ ; 3 ; x

$f'(x)>0$ на всей области определения, а значит, исходная функция монотонно возрастает на всей $D(f)=(-\infty;3]$.

Ответ: $(-\infty;3]$.

3.7. Найдите промежуток убывания функции $f(x)=3x-8e^{-x}$.

Решение:

1) Область определения: $D(f)=R$.

2) $f'(x)=3+8e^{-x}=\dfrac{3e^{x}+8}{e^{x}}$

Производная функции нулей не имеет, нет также и точек, в которых производная не существует. Следовательно, критических точек нет.

3) знак $f'(x)$ + ; $f(x)$ ↗ ; x

Производная всюду положительна, следовательно, функция $f(x)=3x-8e^{-x}$ возрастает на всей числовой оси.

Ответ: нет промежутков убывания.

3.8. Найдите интервалы возрастания и убывания функций:

1) $f(x)=\dfrac{1+4x}{2x-3}$ **2)** $f(x)=\dfrac{(x+2)^2}{x-1}$

3) $f(x)=\dfrac{x}{3}-\sqrt[3]{x}$ **4)** $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$

5) $f(x)=2e^{x}\left(x^3+2x^2\right)$ **6)** $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}-\dfrac{\ln 3}{3}$

7) $f(x)=x+\cos x$ **8)** $f(x)=\cos 2x-\sqrt{3}x$

Решение:

1) $f(x)=\dfrac{1+4x}{2x-3}$

1) $D(f)=\left(-\infty;\ \dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2};\ \infty\right)$

2) $f'(x)=\dfrac{(1+4x)'\cdot(2x-3)-(2x-3)'\cdot(1+4x)}{(2x-3)^2}=$

$=\dfrac{4(2x-3)-2(1+4x)}{(2x-3)^2}=\dfrac{-14}{(2x-3)^2}$

Критических точек нет.

3) знак $f'(x)$: $-$ до $\frac{3}{2}$, $-$ после $\frac{3}{2}$; $f(x)$: убывает ↘ на обоих промежутках (точка $\frac{3}{2}$ выколота, ось x).

Производная не обращается в нуль и на всей области определения функции отрицательная, значит, $f(x)$ монотонно убывает на $D(f)$.

Ответ: функция убывает на $(-\infty;\ 1{,}5)$ и $(1{,}5;\ \infty)$.

2) $f(x)=\dfrac{(x+2)^2}{x-1}=\dfrac{x^2+4x+4}{x-1}$

1) $D(f)=(-\infty;\ 1)\cup(1;\ \infty)$

2) $f'(x)=\dfrac{(x^2+4x+4)'\cdot(x-1)-(x-1)'\cdot(x^2+4x+4)}{(x-1)^2}=$

$=\dfrac{(2x+4)(x-1)-(x^2+4x+4)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0:\qquad x^2-2x-8=0$

$x_1=-2,\ \ x_2=4$

$f'(x)$ не существует в точке $x=1$, но критической данная точка не будет, так как не принадлежит области определения.

Критические точки: $x_1=-2$ и $x_2=4$

3) Исследуем знак производной:

$f'(x)$	$+$	-2	$-$	1	$-$	4	$+$	x
$f(x)$	↗	•	↘	○	↘	•	↗	

Ответ: возрастает на $(-\infty;\ -2]$ и $[4;\ \infty)$, убывает на $[-2;\ 1)$ и $(1;\ 4]$.

3) $f(x)=\frac{x}{3}-\sqrt[3]{x}$

1) $D(f)=(-\infty;\ \infty)$

2) $f'(x)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Нули производной:

$f'(x)=0$: $\quad \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{3\sqrt[3]{x^2}}=0$

$\sqrt[3]{x^2}=1$

$x^2=1;\quad x_{1,2}=\pm 1$

Точки разрыва производной: $x=0$.

3)

$f'(x)$	$+$	-1	$-$	0	$-$	1	$+$	x
$f(x)$	↗	•	↘	•	↘	•	↗	

Ответ: возрастает на $(-\infty;\ -1]$ и $[1;\ \infty)$, убывает на $[-1;\ 1]$.

4) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$

1) $D(f)$: $2x-x^2\geq 0;\quad x(x-2)\leq 0;\quad x\in[0;\ 2]$.

2) $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2-2x}{\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$

$f'(x)=0$: $\quad 1-x=0$

$x=1$

Производная не существует в точках $x=0$ и $x=2$, но это граничные точки области определения функции, следовательно, критическими быть не могут.

Критическая точка: $x = 1$.

3) Исследуем знак производной:

$$\begin{array}{c|ccccc} f'(x) & [0 & + & 1 & - & 2] \\ f(x) & & \nearrow & & \searrow & \end{array} \quad x$$

Ответ: возрастает на $[0;\ 1]$, убывает на $[1;\ 2]$.

5) $f(x) = 2e^x\left(x^3 + 2x^2\right)$

1) $D(f) = (-\infty;\ \infty)$

2) $f'(x) = 2\left(e^x \cdot \left(x^3 + 2x^2\right) + \left(3x^2 + 4x\right) \cdot e^x\right) = 2e^x\left(x^3 + 5x^2 + 4x\right)$

$f'(x) = 0:$ $\qquad 2e^x\left(x^3 + 5x^2 + 4x\right) = 0$

$e^x \neq 0$, $x\left(x^2 + 5x + 4\right) = 0$

$x_1 = 0$, $x_2 = -4$, $x_3 = -1$ - критические точки

3) Исследуем знак производной:

$$\begin{array}{c|ccccccc} f'(x) & - & -4 & + & -1 & - & 0 & + \\ f(x) & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \end{array} \quad x$$

Ответ: возрастает на $[-4; -1]$; $[0; \infty)$, убывает на $(-\infty; -4]$; $[-1; 0]$.

6) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x} - \dfrac{\ln 3}{3}$

1) $D(f):$ $\begin{cases} x > 0, \\ \ln x \neq 0; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

2) $f'(x) = \dfrac{(x)' \cdot \ln x - (\ln x)' \cdot x}{\ln^2 x} - \left(\dfrac{\ln 3}{3}\right)' = \dfrac{\ln x - \frac{1}{x} \cdot x}{\ln^2 x} = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

$f'(x) = 0:$ $\quad \ln x - 1 = 0$

$x = e$

$f'(x)$ не существует в точке $x = 1 \notin D(f)$.

Критическая точка: $x = e$.

3) Отметим критические точки на числовой прямой и исследуем знак производной на каждом из полученных интервалов:

$$\frac{e}{4}\in(0;1): \qquad f'\left(\frac{e}{4}\right)=\frac{\ln e-\ln 4-1}{\ln^2\left(\frac{e}{4}\right)}=\frac{-\ln 4}{\ln^2\left(\frac{e}{4}\right)}<0;$$

$$\frac{e}{2}\in(1;e]: \qquad f'\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{\ln e-\ln 2-1}{\ln^2\left(\frac{e}{2}\right)}=\frac{-\ln 2}{\ln^2\left(\frac{e}{2}\right)}<0;$$

$$e^2\in[e;\infty): \qquad f'(e^2)=\frac{2\ln e-1}{4\ln^2 e}=\frac{1}{4}>0.$$

$f'(x)$	0	$-$	1	$-$	e	$+$	x
$f(x)$		↘		↘		↗	

Ответ: функция возрастает на $[e;\ \infty)$, убывает на $(0;\ 1)$ и $(1;\ e]$.

7) $f(x)=x+\cos x$

1) $D(f)=(-\infty;\ \infty)$

2) $f'(x)=1-\sin x$

3) В силу ограниченности функции $y=\sin x$, получаем, что $f'(x)$ не отрицательна при любых значениях x:

$-1\le\sin x\le 1$

$0\le 1-\sin x\le 2$

Следовательно функция $f(x)=x+\cos x$ возрастает на всей числовой оси.

Ответ: функция возрастает на $(-\infty;\ \infty)$.

8) $f(x)=\cos 2x-\sqrt{3}x$

1) $D(f)=(-\infty;\ \infty)$

2) $f'(x)=-2\sin 2x-\sqrt{3}$

3) Для того чтобы определить промежутки монотонности заданной функции, рассмотрим два случая:

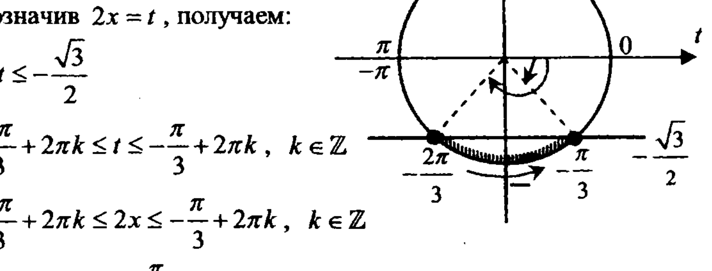
1 случай: $f'(x) \geq 0$.

$-2\sin 2x - \sqrt{3} \geq 0$

$\sin 2x \leq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Обозначив $2x = t$, получаем:

$\sin t \leq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq t \leq -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq 2x \leq -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$-\dfrac{\pi}{3} + \pi k \leq x \leq -\dfrac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ - промежуток возрастания функции.

2 случай: $f'(x) \leq 0$.

$-2\sin 2x - \sqrt{3} \leq 0$

$\sin 2x \geq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Обозначив $2x = t$, получаем:

$\sin t \geq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \leq t \leq \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \leq 2x \leq \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$-\dfrac{\pi}{6} + \pi k \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ - промежуток убывания функции.

Ответ: функция возрастает на $\left[-\dfrac{\pi}{3} + \pi k; -\dfrac{\pi}{6} + \pi k\right]$,

убывает на $\left[-\dfrac{\pi}{6} + \pi k; \dfrac{2\pi}{3} + \pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

<u>Определение 4</u>. Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется *точкой максимума* данной функции, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из указанной окрестности выполняется неравенство: $f(x) < f(x_0)$.

<u>Определение 5</u>. Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется *точкой минимума* данной функции, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из указанной окрестности выполняется неравенство: $f(x) > f(x_0)$.

Для точек максимума и минимума функции принято общее название - *точки экстремума.*

Значения функции в этих точках называют соответственно *максимумами* и *минимумами* функции:

$$\max f(x) = f(x_0) \quad (\min f(x) = f(x_0))$$

Не следует считать, что максимум функции является наибольшим значением во всей области определения данной функции, оно является наибольшим лишь по сравнению со значениями функции, взятыми в некоторой окрестности точки максимума. Аналогично, минимум функции не обязательно является наименьшим значением данной функции.

<u>Теорема 4</u> (необходимый признак экстремума). Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции либо равна 0, либо не существует.

<u>Теорема 5</u> (достаточные условия экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка критическую точку $x = x_0$. Тогда:

а) если производная меняет знак с плюса на минус при переходе через точку x_0 слева направо, то $x = x_0$ - точка максимума функции;

б) если производная меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0 слева направо, то $x = x_0$ - точка минимума функции;

в) если производная сохраняет знак при переходе через точку x_0, то в точке $x = x_0$ экстремума нет.

Таким образом, точки x из области определения функции $f(x)$, в которых возрастание функции сменяется убыванием или, наоборот, убывание сменяется возрастанием, являются соответственно точками максимума и минимума функции. В этих точках функция принимает самое большое или самое маленькое значение по сравнению со значениями в близких точках.

Сказанное выше можно записать в виде таблицы:

	$(x_0-\delta;\ x_0)$	$(x_0;\ x_0+\delta)$	**Геометрическая иллюстрация**	**Вывод**
$f'(x)=0$	+	–	x_0	**max**
$f'(x)=0$	–	+	x_0	**min**
$f'(x)=0$	+	+	x_0	**нет**
$f'(x)=0$	–	–	x_0	**нет**
$f'(x)$ не сущ.	+	–	x_0	**max**
$f'(x)$ не сущ.	+	+	x_0	**нет**
$f'(x)$ не сущ.	–	+	x_0	**min**

При нахождении точек экстремума функции важно понимать, что точкой экстремума может быть только *внутренняя точка* области определения функции.

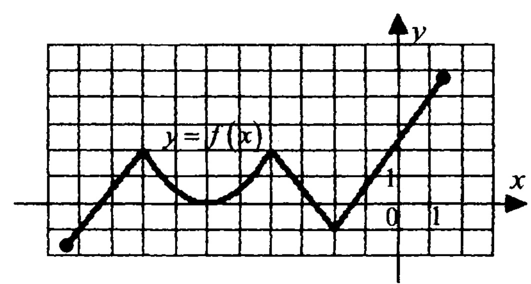
Схема нахождения точек экстремума

1. Найти производную функции и все критические точки из области определения функции.

2. Определить знаки производной при переходе через критические точки.

3. Вычислить значение функции в каждой экстремальной точке.

3.9. Укажите наименьший промежуток, которому принадлежат все точки экстремума функции, график которой изображен на рисунке.

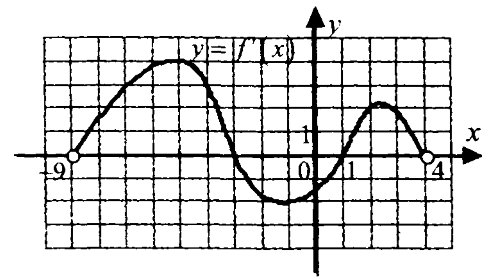


Решение:

На основании определений 4 и 5 для данной функции точками экстремума являются: $x=-8$, $x=-6$, $x=-4$ и $x=-2$. Поэтому наименьшим промежутком, которому принадлежат все точки экстремума функции, является $[-8;-2]$.

Ответ: $[-8;-2]$.

3.10. Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(-9;4)$. График ее производной $y=f'(x)$ изображен на рисунке. Найдите точку максимума функции на данном промежутке.

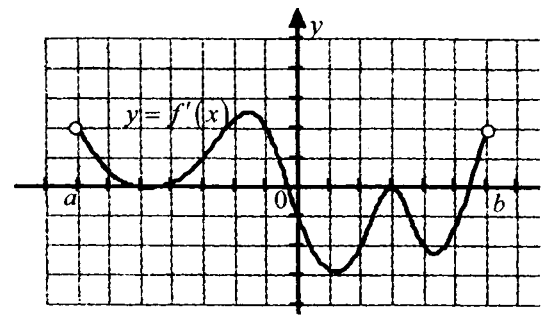


Решение:

Точкой максимума является критическая точка, в которой производная меняет знак с «плюса» на «минус». Такой точкой является точка $x = -3$.

Ответ: $x = -3$.

3.11. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $(a; b)$. График ее производной $y = f'(x)$ изображен на рисунке. Определите количество точек минимума функции на данном промежутке.

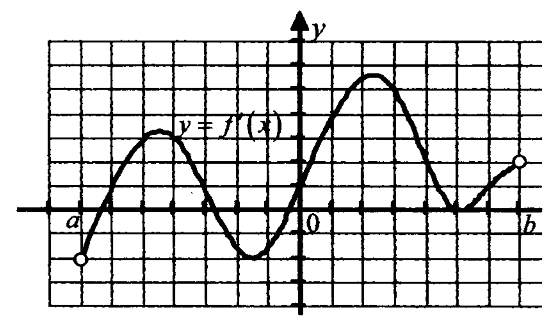


Решение:

Точкой минимума является точка пересечения графика производной с осью Ox, в которой знак производной меняется с «минуса» на «плюс». Такая точка на графике одна.

Ответ: 1.

3.12. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $(a; b)$. График ее производной $y = f'(x)$ изображен на рисунке. Определите количество точек экстремума функции на данном промежутке.



Решение:

Точками экстремума являются точки пересечения графика производной с осью Ox, в которой производная меняет знак. Таких точек на графике три.

Ответ: 3.

3.13. Найдите экстремумы функции $f(x) = x^5 - 15x^3$.

Решение:

1) Найдем критические точки функции $f(x)$.

$D(f) = (-\infty;\ \infty)$

$f'(x) = 5x^4 - 45x^2$

$5x^4 - 45x^2 = 0$

$5x^2(x^2 - 9) = 0$

$x_1 = 0;\ \ x_2 = -3;\ \ x_3 = 3$

2) Исследуем функцию на монотонность:

$f'(x)$: $+$ on $(-\infty; -3)$, $-$ on $(-3; 0)$, $-$ on $(0; 3)$, $+$ on $(3; \infty)$

$f(x)$: ↗ -3 (**max**) ↘ 0 ↘ 3 (**min**) ↗ x

$y_{max} = y(-3) = -243 - 15\cdot(-27) = 162$

$y_{min} = y(3) = 243 - 15\cdot 27 = -162$

Ответ: $y_{max} = 162$; $y_{min} = -162$.

3.14. Найдите точки экстремума функций:

1) $f(x)=(x+1)^2(x-2)^2$

2) $f(x)=-\frac{x}{4}-\frac{4}{x}$

3) $f(x)=-\left|4x+x^2\right|$

4) $f(x)=2\sin x+\cos 2x$

5) $f(x)=\frac{e^x}{x}$

6) $f(x)=2\sqrt{x}-x$

7) $f(x)=x^2\sqrt{1-x^2}$

8) $f(x)=x^2\ln x$

9) $f(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$

Решение:

1) $f(x)=(x+1)^2(x-2)^2=\left(x^2-x-2\right)^2$

1) $D(f)=(-\infty;\ \infty)$

$$f'(x)=2\left(x^2-x-2\right)\cdot\left(x^2-x-2\right)'=2\left(x^2-x-2\right)\cdot(2x-1)$$

$f'(x)=0:$ $\quad 2\left(x^2-x-2\right)\cdot(2x-1)=0$

$x_1=2,\ x_2=-1,\ x_3=\frac{1}{2}$ - критические точки

2)

$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	↘	-1 min	↗	$\frac{1}{2}$ max	↘	2 min	↗	x

Ответ: $x=-1$, $x=2$ - точки минимума; $x=\frac{1}{2}$ - точка максимума.

2) $f(x)=-\frac{x}{4}-\frac{4}{x}$

1) $D(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$

$$f'(x)=-\frac{1}{4}+\frac{4}{x^2}=\frac{16-x^2}{4x^2}$$

$f'(x)=0:$ $\quad 16-x^2=0$

$x_{1,2}=\pm 4$

$f'(x)$ не существует в точке $x=0\notin D(f)$, данная точка критической не является.

Критические точки: $x=\pm 4$.

2)

$$\begin{array}{c|ccccccc} f'(x) & - & & + & & + & & - \\ \hline f(x) & \searrow & -4 & \nearrow & 0 & \nearrow & 4 & \searrow \\ & & \text{min} & & & & \text{max} & \end{array}$$

Ответ: $x=-4$ - точка минимума, $x=4$ - точка максимума.

3) $f(x)=-\left|4x+x^2\right|$

1) $D(f)=(-\infty;\ \infty)$

$$f(x)=\begin{cases}-\left(4x+x^2\right), & x\le -4 \ \text{ è } \ x\ge 0\\ 4x+x^2, & -4<x<0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-4-2x, & x<-4 \ \text{ è } \ x>0\\ 4+2x, & -4<x<0\end{cases}$$

Нули производной:

$f'(x)=0$:

1) $x\in(-\infty;-4)\cup(0;\infty)$

$-4-2x=0$

$x=-2$ - не уд. усл.

2) $x\in(-4;\ 0)$

$4+2x=0$

$x=-2\in(-4;\ 0)$

Производная не существует в точках $x=0$ и $x=-4$, данные точки так же являются критическими.

Критические точки: $x=-2$; $x=-4$; $x=0$.

2)

$$\begin{array}{c|ccccccc} f'(x) & + & & - & & + & & - \\ \hline f(x) & \nearrow & -4 & \searrow & -2 & \nearrow & 0 & \searrow \\ & & \text{max} & & \text{min} & & \text{max} & \end{array}$$

Ответ: $x=-4$ и $x=0$ - точки максимума, $x=-2$ - точка минимума.

4) $f(x)=2\sin x+\cos 2x$

1) $D(f)=(-\infty;\ \infty)$

$f'(x)=2\cos x-2\sin 2x$

$f'(x)=0:$ $\qquad 2\cos x(1-2\sin x)=0$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Найдем критические точки, принадлежащие интервалу $[0;2\pi]$:

$n=0$	$n=1$
$x_1=\dfrac{\pi}{2}$	$x_2=\dfrac{3\pi}{2}$

$k=0$	$k=1$
$x_1=\dfrac{\pi}{6}$	$x_2=\dfrac{5\pi}{6}$

2) Исследуем функцию на отрезке $[0;\ 2\pi]$ и перенесем результаты на общий случай.

$f'(x)$: $[0;\ \frac{\pi}{6}]$ +, $[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}]$ −, $[\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{6}]$ +, $[\frac{5\pi}{6};\ \frac{3\pi}{2}]$ −, $[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi]$ +

$f(x)$: ↗ $\frac{\pi}{6}$ max ↘ $\frac{\pi}{2}$ min ↗ $\frac{5\pi}{6}$ max ↘ $\frac{3\pi}{2}$ min ↗ 2π, x

Ответ: $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$ - точки максимума,

$x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$ - точки минимума.

5) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

1) $D(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$f'(x)=0:$ $\qquad x=1$ - критическая точка

2) $f'(x)$: − (до 0), − (от 0 до 1), + (после 1)

$f(x)$: ↘ 0 ↘ 1 min ↗ x

Ответ: $x=1$ - точка минимума

6) $f(x)=2\sqrt{x}-x$

1) $D(f)=[0;\ \infty)$

$$f'(x)=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-1=\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$f'(x)=0:\qquad \sqrt{x}-1=0$

$x=1$ - критическая точка

2)

$$\begin{array}{c|c|c|c}
f'(x) & & + & & - & \\
\hline
f(x) & 0 & \nearrow & 1 & \searrow & x \\
 & & & \text{max} & &
\end{array}$$

Ответ: $x=1$ - точка максимума

7) $f(x)=x^2\sqrt{1-x^2}=\sqrt{x^4-x^6}$

1) $D(f):\ 1-x^2\geq 0;\quad x\in[-1;1]$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4x^3-6x^5}{\sqrt{x^4-x^6}}=\frac{2x^3\left(2-3x^2\right)}{2x^2\sqrt{1-x^2}}=\frac{x\left(2-3x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f'(x)=0:\qquad x\left(2-3x^2\right)=0$

$x_1=0,\ x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ - критические точки

Производная не существует в точках $x=\pm 1$,но данные точки не являются критическими (это граничные точки $D(f)$).

2) Исследуем функцию на монотонность:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
f'(x) & & + & & - & & + & & - & & \\
\hline
f(x) & -1 & \nearrow & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \searrow & 0 & \nearrow & \sqrt{\frac{2}{3}} & \searrow & 1 & x \\
 & & & \text{max} & & \text{min} & & \text{max} & & &
\end{array}$$

Ответ: $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ - точки максимума, $x=0$ - точка минимума.

8) $f(x)=x^2\ln x$

1) $D(f)$: $\quad x\in(0;\infty)$.

$$f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(2\ln x+1)$$

$$f'(x)=0: \qquad x(2\ln x+1)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ \ln x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=0\notin D(f), \\ x=e^{-\frac{1}{2}}. \end{array}\right.$$

Критическая точка: $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

2) Отметим критические точки на числовой прямой и исследуем знак производной на каждом из полученных интервалов:

$$\frac{1}{e^2}\in\left(0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right]: \qquad f'\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{1}{e^2}\left(2\ln e^{-2}+1\right)=\frac{-3}{e^2}<0\,;$$

$$e\in\left[\frac{1}{\sqrt{e}};\infty\right): \qquad f'(e)=e(2\ln e+1)=3e>0\,.$$

$f'(x)$: $-$ on $\left(0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $+$ on $\left(\frac{1}{\sqrt{e}};\infty\right)$

$f(x)$: ↘ on $\left(0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, ↗ on $\left(\frac{1}{\sqrt{e}};\infty\right)$; $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ — **min**

Ответ: $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ - точка минимума.

9) $f(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}=-(x-1)^{-2}$

1) $D(f)=(-\infty;\,1)\cup(1;\,\infty)$

$$f'(x)=2(x-1)^{-3}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

Критических точек нет, так как производная в нуль не обращается и точка разрыва производной $x=1$ не входит в область определения.

2)

$f'(x)$	$-$		$+$	
$f(x)$	↘	1	↗	x

Ответ: экстремумов нет.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она достигает на нем своего наименьшего и наибольшего значений.

При решении этой задачи возможны два случая:

1) либо наибольшее (наименьшее) значение функции достигается внутри отрезка, и тогда эти значения окажутся в числе экстремумов функции;

2) либо наибольшее (наименьшее) значение достигается на концах отрезка.

Итак, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $y=f(x)$, нужно:

1. Найти производную $f'(x)$ функции $y=f(x)$.

2. Найти критические точки, лежащие внутри отрезка $[a;b]$ и вычислить значения функции в этих точках.

3. Вычислить значения функции на концах отрезка $[a;b]$, т.е. найти $f(a)$ и $f(b)$.

4. Сравнить полученные результаты; наибольшее из найденных значений является наибольшим значением функции $(y_{\text{наиб.}})$ на отрезке $[a;b]$; аналогично, наименьшее из найденных значений есть наименьшее значение функции $(y_{\text{наим.}})$ на этом отрезке.

3.15. Найдите наименьшее значение функции $y=f(x)$ на отрезке $\left[0;\frac{5}{2}\right]$, если $f(x)=x^3-7,5x^2+18x+\cos\frac{\pi}{3}-\sqrt{3+\cos^2 x+\sin^2 x}$.

Решение:

$$f(x)=x^3-7,5x^2+18x+\frac{1}{2}-\sqrt{3+1}=x^3-7,5x^2+18x-1\frac{1}{2}$$

1) $D(f)=(-\infty;\ \infty)$

$f'(x)=3x^2-15x+18$

$f'(x)=0: \qquad 3(x^2-5x+6)=0$

$x_1=2, \quad x_2=3\notin\left[0;\frac{5}{2}\right]$

2) $f(2)=2^3-7{,}5\cdot 2^2+18\cdot 2-1{,}5=12{,}5$

3) $f(0)=-1{,}5$

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}\right)^3-\frac{15}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2+18\cdot\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=12{,}25$$

Ответ: $y_{\text{наим.}}=f(0)=-1{,}5$.

3.16. Найдите наибольшее значение функции $y=f(x)$ на отрезке $\left[\frac{1}{e};\ e^2\right]$, если $f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}$.

Решение:

1) $D(f)=(0;\ \infty)$

$$f'(x)=\frac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}=\frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$$

$f'(x)=0: \qquad \ln x(2-\ln x)=0$

$$\left[\begin{array}{l}\ln x=0,\\ 2-\ln x=0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=e^2.\end{array}\right.$$

2) $f(1)=\frac{\ln^2 1}{1}=0; \qquad f(e^2)=\frac{4\ln^2 e}{e^2}=\frac{4}{e^2}$

3) $f\left(\frac{1}{e}\right)=e$

Ответ: $y_{\text{наиб.}}=f\left(\frac{1}{e}\right)=e$.

3.17. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[-1;\ 2]$, если $f(x) = \dfrac{2^x + 2^{2-x}}{\ln 2}$.

Решение:

$$f(x) = \frac{2^x + 2^{2-x}}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\left(2^x + 2^{2-x}\right)$$

1) $D(f) = (-\infty;\ \infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 2}\left(2^x \ln 2 + 2^{2-x} \ln 2 \cdot (2-x)'\right) = 2^x - 2^{2-x}$$

$f'(x) = 0:$

$$2^x - 2^{2-x} = 0$$

$$2^x = 2^{2-x}$$

$$x = 2 - x$$

$$x = 1$$

2) $f(1) = \dfrac{4}{\ln 2}$

3) $f(-1) = \dfrac{17}{2\ln 2}$, $\quad f(2) = \dfrac{5}{\ln 2}$

Ответ: $y_{\text{наиб.}} = f(-1) = \dfrac{17}{2\ln 2}$, $y_{\text{наим.}} = f(1) = \dfrac{4}{\ln 2}$.

3.18. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $\left[0;\ \dfrac{3\pi}{4}\right]$, если $f(x) = \sin x - \dfrac{1}{3}\sin 3x$.

Решение:

1) $D(f) = (-\infty;\ \infty)$

$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x \cdot (3x)' = \cos x - \cos 3x = 2\sin 2x \cdot \sin x$$

$f'(x) = 0:$

$$\sin 2x \cdot \sin x = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0, \\ \sin x = 0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Решение $x = \pi n$, $n \in Z$ является подмножеством решений $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, поэтому окончательно получаем:

$x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ - критические точки.

Найдем критические точки, принадлежащие интервалу $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$:

$k=0$	$k=1$	$k=2$
$x_1 = 0 \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$	$x_2 = \frac{\pi}{2} \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$	$x_3 = \pi \notin \left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$

2) $f(0) = 0$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} = \frac{4}{3}$.

3) $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{3}\sin\frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Ответ: $y_{\text{наиб.}} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{3}$, $y_{\text{наим.}} = f(0) = 0$.

3.19. Найдите наибольшее значение функции $y = 3(2x-4)^4 - (2x-4)^5$ при $|x-2| \le 1$.

Решение:

Решим неравенство $|x-2| \le 1$:

$-1 \le x - 2 \le 1$

$1 \le x \le 3$

Требуется найти наибольшее значение функции на отрезке $[1;3]$.

1) $f'(x) = 3\cdot 4(2x-4)^3 \cdot 2 - 5(2x-4)^4 \cdot 2 = 2(2x-4)^3(12 - 5(2x-4)) =$
$= 2(2x-4)^3(32-10x)$

$f'(x) = 0$: $\quad 2(2x-4)^3(32-10x) = 0$

$x_1 = 2 \in [1;3]$; $\quad x_1 = 3{,}2 \notin [1;3]$

2) $f(2) = 0$

3) $f(1) = 80$; $f(3) = 16$.

Ответ: $y_{\text{наиб.}} = 80$.

3.20. Найдите наибольшее значение функции $y=\dfrac{3}{\sin\frac{x}{2}}$ на $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение:

Значение функции $y=\dfrac{3}{\sin\frac{x}{2}}$ будет наибольшим, если значение функции $y=\sin\dfrac{x}{2}$ будет наименьшим. Найдем это значение.

1) $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

$f'(x)=0:$

$$\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$x=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

Критическая точка, принадлежащая интервалу $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{3\pi}{2}\right]$: $x=\pi$.

2) $f(\pi)=1$.

3) $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$; $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Наименьшим из полученных значений является $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Тогда, наибольшее значение $y=\dfrac{3}{\sin\frac{x}{2}}$ на $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{3\pi}{2}\right]$ есть: $y_{\text{наиб.}}=\dfrac{3}{\frac{1}{2}}=6$

Ответ: $y_{\text{наиб.}}=6$.

3.21. Найдите все значения x, при которых функция $f(x)=2+\cos x-\sin^2 x$ принимает наибольшее и наименьшее значения. Укажите эти значения.

Решение:

$$f(x)=2+\cos x-\sin^2 x=2+\cos x-\left(1-\cos^2 x\right)=\cos^2 x+\cos x+1$$

Заменой $\cos x = t$ задача о нахождении наибольшего и наименьшего значений функции $f(x) = 2 + \cos x - \sin^2 x$ сводится к задаче о нахождении наибольшего и наименьшего значений функции $g(t) = t^2 + t + 1$ на отрезке $[-1;1]$.

1) $g'(t) = 2t + 1$

$2t + 1 = 0$

$t = -\dfrac{1}{2} \in [-1;1]$

2) $g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{4}$

3) $g(-1) = 1 - 1 + 1 = 1$; $g(1) = 1 + 1 + 1 = 3$

Таким образом, $g_{\text{наиб.}} = g(1) = 3$; $g_{\text{наим.}} = g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$.

Найдем x, при которых достигаются наибольшее и наименьшее значения. Для этого решим уравнения:

$\cos x = 1$

$x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

$\cos x = -\dfrac{1}{2}$

$x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $f_{\text{наиб.}} = 3$ при $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$f_{\text{наим.}} = \dfrac{3}{4}$ при $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим применение производной для нахождения области значений функции.

3.22. Найдите множество значений функции:

1) $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$

2) $f(x) = 2x^2 + \dfrac{8}{x^2}$

3) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

4) $y = x\sqrt{4x+1}$

5) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$

Решение:

Будем искать область значений как $E(f)=\left[\min\limits_{x\in D(f)} f(x);\ \max\limits_{x\in D(f)} f(x)\right]$.

1) $f(x)=3x^2+4x+2$

$D(f)=(-\infty;\ \infty)$

$f'(x)=6x+4$

$f'(x)=0$ при $x=-\dfrac{2}{3}$.

$f'(x)$: $-$ на $\left(-\infty;\ -\frac{2}{3}\right)$, $+$ на $\left(-\frac{2}{3};\ \infty\right)$

$f(x)$: ↘ $-\frac{2}{3}$ ↗ ; $x=-\frac{2}{3}$ — **min**

$f_{\text{наим.}}=f\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$, наибольшего значения у функции нет.

Ответ: $E(f)=\left[\dfrac{2}{3};\ \infty\right)$.

2) $f(x)=2x^2+\dfrac{8}{x^2}$

$D(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$

$f'(x)=4x-\dfrac{16}{x^3}=\dfrac{4x^4-16}{x^3}$

$f'(x)=0$: $\quad x^4-4=0$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$

$f'(x)$: $-$, $+$, $-$, $+$

$f(x)$: ↘ $-\sqrt{2}$ ↗ 0 ↘ $\sqrt{2}$ ↗ ; $x=-\sqrt{2}$ — **min**, $x=\sqrt{2}$ — **min**

$f_{\text{наим.}}=f\left(\sqrt{2}\right)=f\left(-\sqrt{2}\right)=8$, наибольшего значения у функции нет.

Ответ: $E(f)=[8;\ \infty)$.

3) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$D(f)=(0;\ \infty)$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

$f'(x)=0:\qquad 1-\dfrac{1}{x}=0$

$x=1$

$f'(x)$ не существует в точке $x=0\notin D(f)$

$f'(x)$: на $(0;1)$ «−», на $(1;\infty)$ «+»; $f(x)$: убывает ↘, 1 — min, возрастает ↗ (точка 0 выколота).

$f_{\text{наим.}}=f(1)=2$, наибольшего значения у функции нет.

Ответ: $E(f)=[2;\ \infty)$.

4) $f(x)=x\sqrt{4x+1}$

$D(f)=\left[-\dfrac{1}{4};\ \infty\right)$

$$f'(x)=\sqrt{4x+1}+\frac{2x}{\sqrt{4x+1}}=\frac{6x+1}{\sqrt{4x+1}}$$

$f'(x)=0:\qquad 6x+1=0$

$x=-\dfrac{1}{6}$

Точка разрыва производной $x=-\dfrac{1}{4}$ не является внутренней точкой $D(f)$.

$f'(x)$: на $\left[-\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right)$ «−», на $\left(-\frac{1}{6};\infty\right)$ «+»; $f(x)$: убывает ↘, $-\frac{1}{6}$ — min, возрастает ↗.

$$f_{\text{наим.}} = f\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{6}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{18},$$

наибольшего значения у функции нет.

Ответ: $E(f) = \left[-\frac{\sqrt{3}}{18};\ \infty\right)$.

5) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$D(f) = (-\infty;\ \infty)$

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$f'(x) = 0:$ $\quad x^2 - 1 = 0$

$x_{1,2} = \pm 1$

$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
x		-1		1	
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘

$$f_{\text{наим.}} = f(-1) = -\frac{1}{2}, \qquad f_{\text{наиб.}} = f(1) = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $E(f) = \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$.

Решение задач на нахождение оптимальных значений

Следующая серия задач направлена на отыскание наибольших или наименьших значений некоторых величин. Такие задачи называются **экстремальными** или **оптимизационными.**

Схема решения задач оптимизации состоит в следующем.

1. По условию задачи выделить некоторую оптимизируемую величину (значение которой должно быть наибольшим или наименьшим).

2. Исходя из условий задачи, выразить оптимизируемую величину как функцию через одну из участвующих в задаче неизвестных величин, которую можно принять за независимую переменную x. Установить реальные границы изменения этой переменной - $D(f)$.

3. Исследовать функцию $y = f(x)$ на наибольшее или наименьшее значение на $D(f)$ и сделать выводы о решении задачи.

3.23. Число 8 разложите на два неотрицательных слагаемых так, чтобы произведение куба первого слагаемого на второе слагаемое было бы наибольшим.

Решение:

Обозначим первое слагаемое в разложении 8 через x.

Тогда второе слагаемое можно представить как $(8-x)$.

Произведение куба первого слагаемого на второе слагаемое:

$f(x) = x^3(8-x) = 8x^3 - x^4$.

Область определения полученной функции $D(f)$: $x \in [0; 8]$.

Найдем значение x, при котором функция $f(x)$ принимает наибольшее значение.

$f'(x) = 24x^2 - 4x^3 = 4x^2(6-x)$

$f'(x) = 0$: $\quad 4x^2(6-x) = 0$,

$x_1 = 0$; $x_2 = 6$.

	0		6		8
$f'(x)$		+		−	
$f(x)$		↗	max	↘	

Искомое разложение: $8 = 6 + 2$.

Ответ: 6+2.

3.24. Число 180 представить в виде суммы трех положительных слагаемых так, чтобы два из них относились как $1:2$, а произведение всех трех слагаемых было бы наибольшим.

Решение:

Обозначим неизвестные слагаемые x, y, z.

По условию: $\begin{cases} x + y + z = 180, \\ y = 2x. \end{cases}$ Тогда $z = 180 - 3x$.

$D(f)$ в данном случае определяется из условия положительности всех слагаемых:

$$\begin{cases} x>0, \\ 2x>0, \\ 180-3x>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0, \\ x<60; \end{cases} \qquad x\in(0;\ 60).$$

Произведение трех слагаемых обозначим через $f(x)$.

$f(x)=x\cdot y\cdot z=x\cdot 2x\cdot(180-3x)=360x^2-6x^3$

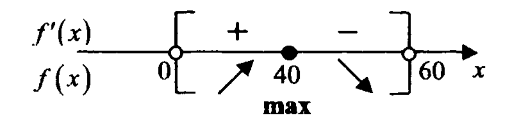
Найдем максимум полученной функции на интервале $(0;\ 60)$:

$f'(x)=720x-18x^2$

$f'(x)=0:\qquad 720x-18x^2=0$

$18x(40-x)=0$

$x_1=0,\ \ x_2=40$



$x=40$ является искомой точкой максимума функции $f(x)$.

При этом: $y=2x=80$; $z=180-3x=60$.

Ответ: $180=40+80+60$.

3.25. В геометрической прогрессии (b_n) с положительными членами выполняется условие $b_1=(b_1+b_2)(3b_1+4b_2)$. При каком значении знаменателя прогрессии сумма четырех первых членов принимает наименьшее значение? Найдите эту сумму.

Решение:

Пусть q – знаменатель прогрессии (b_n), и $q>0$

По условию:

$b_1=(b_1+b_1q)(3b_1+4b_1q)$,

$b_1=b_1^2(1+q)\cdot(3+4q)$.

Из данного соотношения получаем: $b_1=\dfrac{1}{(1+q)\cdot(3+4q)}$.

Составляем функцию суммы четырех первых членов геометрической прогрессии:

$$S_4=\frac{b_1\cdot\left(q^4-1\right)}{q-1}=b_1\cdot(q+1)\left(q^2+1\right)=\frac{(q+1)\left(q^2+1\right)}{(1+q)(3+4q)}=\frac{q^2+1}{3+4q}.$$

Найдем максимум полученной функции.

$$S'(q)=\frac{4q^2+6q-4}{(3+4q)^2}$$

$$S'(q)=0: \qquad 2q^2+3q-2=0,$$

$$q_1=\frac{1}{2},\ \ q_2=-2\notin D(f).$$

$S'(q)$ — +

$S(q)$ 0 $\frac{1}{2}$ q

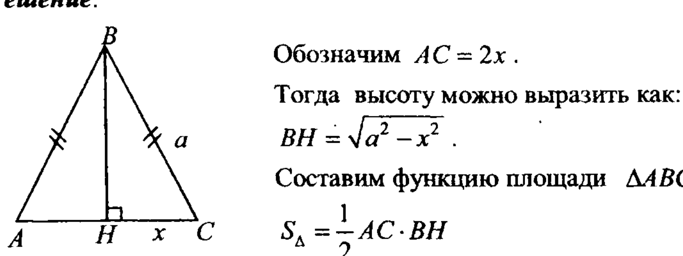
min

$$\min S_4\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $q=\frac{1}{2}$, $\min S_4=\frac{1}{4}$.

3.26. Среди всех равнобедренных треугольников с боковой стороной a найдите треугольник наибольшей площади.

Решение:



Обозначим $AC=2x$.

Тогда высоту можно выразить как:

$BH=\sqrt{a^2-x^2}$.

Составим функцию площади ΔABC:

$$S_\Delta=\frac{1}{2}AC\cdot BH$$

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\sqrt{a^2-x^2}=x\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{x^2\left(a^2-x^2\right)}=\sqrt{a^2x^2-x^4}$$

Найдем критические точки полученной функции $S(x)$.

$D(S)$: $0<x<a$

$$S'(x)=\frac{2a^2x-4x^3}{2\sqrt{a^2x^2-x^4}}=\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$S'(x)=0:\qquad a^2-2x^2=0,$

$$x_1=\frac{a}{\sqrt{2}},\quad x_2=-\frac{a}{\sqrt{2}}\notin D(S).$$

Проверим, будет ли критическая точка $x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ являться точкой максимума функции $S(x)$.

$$x=\frac{a}{2}\in\left(0;\frac{a}{\sqrt{2}}\right]:\quad S'\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2-\frac{a^2}{2}}{\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}}=\frac{a}{\sqrt{3}}>0;$$

$$x=\frac{4a}{5}\in\left[\frac{a}{\sqrt{2}};a\right):\quad S'\left(\frac{4a}{5}\right)=\frac{a^2-\frac{32}{25}a^2}{\sqrt{a^2-\frac{16}{25}a^2}}=\frac{-7a}{15}<0.$$

Таким образом, $\max S_\Delta=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{2}}=\dfrac{a^2}{2}$.

Ответ: $\max S_\Delta=\dfrac{a^2}{2}$.

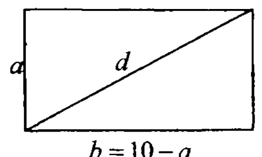
3.27. Найдите длины сторон a, b прямоугольника с периметром 20 *см*, имеющего наименьшую диагональ.

Решение:

По условию $P=2a+2b=20$.

Тогда b можно выразить через a как: $b=10-a$.

Область определения в данном случае: $0<a<10$.



По теореме Пифагора представим диагональ d прямоугольника как функцию от a:
$d^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (10-a)^2 = 2a^2 - 20a + 100$.

Найдем наименьшее значение функции $d(a) = 2a^2 - 20a + 100$ на промежутке $(0;10)$. Исследуемое выражение – квадратный трехчлен. Его наименьшее значение достигается в вершине параболы:

$$a = \frac{20}{2 \cdot 2} = 5.$$

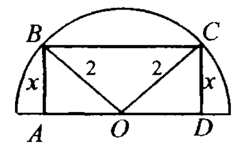
При $a = 5$, получаем $b = 5$.

Таким образом, прямоугольник с периметром 20 *см* имеет наименьшую диагональ, когда все его стороны по 5 *см*.

Ответ: $a = b = 5$ *см* (т.е. квадрат).

3.28. В полукруг радиуса 2 вписан прямоугольник наибольшей площади. Найдите его площадь.

Решение:



Обозначим ширину вписанного в полукруг прямоугольника через x.

Зная, что $BO = CO = 2$ как радиусы полукруга, можно найти:

$AO = OD = \sqrt{4 - x^2}$ (теорема Пифагора).

Тогда площадь прямоугольника составит:

$S(x) = x \cdot 2\sqrt{4 - x^2} = 2\sqrt{4x^2 - x^4}$.

Чтобы найти наибольшее значение площади вписанного прямоугольника, нужно найти наибольшее значение полученной функции $S = S(x)$ на интервале $(0; 2)$.

$$S'(x) = 2 \cdot \frac{8x - 4x^3}{2\sqrt{4x^2 - x^4}} = \frac{4(2 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$S'(x)=0:$ $\qquad 4\left(2-x^2\right)=0$

$$x_1=-\sqrt{2}\notin(0;2),\quad x_2=\sqrt{2}\in(0;2)$$

$S'(x)$: на $(0;\sqrt{2})$ «+», на $(\sqrt{2};2)$ «−»; $S(x)$ возрастает на $(0;\sqrt{2})$, убывает на $(\sqrt{2};2)$; $\sqrt{2}$ — max.

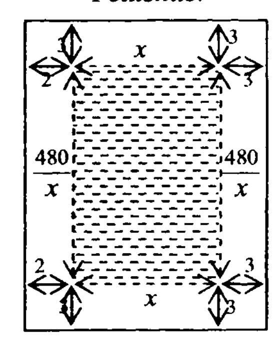
Получаем, что наибольшее значение площади прямоугольника:

$$S_{\text{наиб.}}=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{4-\left(\sqrt{2}\right)^2}=4.$$

Ответ: 4.

3.29. Площадь, занимаемая печатным текстом, составляет на странице книги 480 см^2. Ширина полей вверху и внизу страницы по 3 см, а боковые отступы слева и справа сделаны по 2 и 3 см соответственно. Определите, какими должны быть ширина и высота страницы, чтобы количество израсходованной бумаги было наименьшим.

Решение:



Обозначим длину печатного текста через x $(x>0)$.

Тогда ширина печатного текста составит: $\dfrac{480}{x}$.

Количество израсходованной бумаги будет наименьшим, если площадь листа будет наименьшей.

С учетом полей длина листа бумаги составит $(x+5)$ см, а ширина - $\left(\dfrac{480}{x}+6\right)$ см.

$$S(x)=(x+5)\left(\frac{480}{x}+6\right)=6x+\frac{2400}{x}+510$$

$$S'(x)=6-\frac{2400}{x^2}=\frac{6\left(x^2-400\right)}{x^2}=\frac{6(x+20)(x-20)}{x^2}=0$$

По смыслу задачи критической точкой является $x=20$.

$S'(x)$ [− + ; $S(x)$: 0 ↘ 20 ↗ x; min

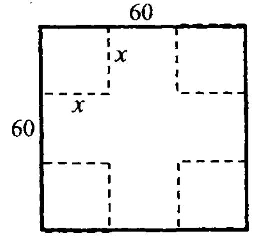
Минимальный расход бумаги получится, если длина печатного текста будет 20 см, а ширина соответственно 24 см.

С учетом полей размеры листа бумаги будут 25 см и 30 см.

Ответ: 25×30 см.

3.30. Имеется квадратный лист жести, сторона которого 60 см. Вырезая по всем его углам равные квадраты и загибая оставшуюся часть, нужно изготовить коробку (без крышки). Каковы должны быть размеры вырезаемых квадратов, чтобы коробка имела наибольший объем?

Решение:



Обозначим сторону вырезаемых квадратов через x.

Дном коробки является квадрат со стороной $60-2x$, а высота коробки равна стороне x вырезаемого квадрата.

Тогда объем коробки выразится функцией:

$V(x)=(60-2x)^2x=4x^3-240x^2+3600x$.

Найдем значение x, при котором функция принимает наибольшее значение.

$V'(x)=12x^2-480x+3600$

$V'(x)=0$: $\quad 12x^2-480x+3600=0$

$x^2-40x+300=0$

$x_1=30$, $x_2=10$

Очевидно, что $x=30$ не отвечает условию, так как в этом случае квадрат разрезается на 4 равные части. Поэтому исследуем функцию на экстремум в критической точке $x=10$.

$V'(x)$ [+ −] ; $V(x)$: 0 ↗ 10 ↘ 30 x; max

Получаем, что сторона вырезаемого квадрата должна быть равна 10.

Ответ: 10 см.

3.31. Определите размеры открытого бассейна объемом 32 м^3 с квадратным дном, на облицовку дна и стен которого затрачивается наименьшее количество материала.

Решение:

Пусть сторона дна есть x, тогда площадь дна составит x^2.

Высота бассейна составит: $h = \frac{V_{бассейна}}{S_{дна}} = \frac{32}{x^2}$.

Сумма площадей дна и четырех стенок будет:

$S(x) = x^2 + 4 \cdot \frac{32}{x^2} \cdot x = x^2 + \frac{128}{x}$.

Найдем значение x, при котором функция $S(x)$ принимает наименьшее значение.

$S'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} = \frac{2x^3 - 128}{x^2}$

$S'(x) = 0$: $\frac{2(x^3 - 64)}{x^2} = 0$; $x = 4$

$S'(x)$: на $(0; 4)$ — «−», на $(4; +\infty)$ — «+»

$S(x)$: убывает на $(0; 4)$, возрастает на $(4; +\infty)$; $x = 4$ — min

Получаем, что сторона дна бассейна должна быть 4 м, а высота бассейна 2м.

Ответ: 4 м, 4 м, 2 м.

3.32. Найдите наибольшее значение объема цилиндра, площадь полной поверхности которого равна 6π.

Решение:

Площадь полной поверхности цилиндра определяется по формуле:

$2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 6\pi$,

где r - радиус оснований цилиндра, h - высота цилиндра.

Из заданного соотношения выразим высоту h через r:

$r^2 + r \cdot h = 3$;

$$h = \frac{3 - r^2}{r}.$$

Объем цилиндра вычисляется по формуле:

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi r^2 \cdot \frac{3 - r^2}{r} = \pi\left(3r - r^3\right).$$

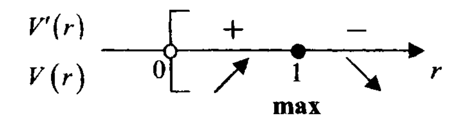
Найдем наибольшее значение полученной функции, выражающей объем цилиндра.

$$V'(r) = \pi\left(3 - 3r^2\right).$$

$V'(r) = 0:$ $\quad 3 - 3r^2 = 0$

$r_1 = -1, \quad r_2 = 1$

Так как по условию радиус основания цилиндра должен быть больше нуля, функцию $V(r)$ имеет смысл исследовать на монотонность только в окрестности критической точки $r = 1$.



Получаем, что наибольшее значение объема цилиндра:

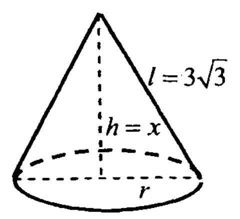
$$V_{\text{наиб.}} = \pi\left(3 \cdot 1 - 1^3\right) = 2\pi.$$

Ответ: 2π.

3.33. Образующая конуса равна $3\sqrt{3}$. Чему должна быть равна высота конуса, чтобы его объем был наибольшим?

Решение:

Обозначим высоту конуса h через x $\quad (x > 0)$.



Тогда радиус основания конуса по теореме Пифагора:

$$r=\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2-h^2}=\sqrt{27-x^2}\ .$$

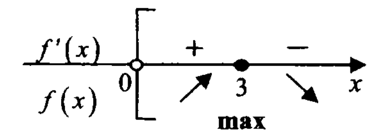
Найдем объем конуса как функцию от x:

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(27-x^2\right)x=\frac{1}{3}\pi\left(27x-x^3\right).$$

Определим точки максимума $V(x)$:

$$V'(x)=\frac{1}{3}\pi\left(27-3x^2\right)=\pi\left(9-x^2\right)=0$$

$x_1=-3\notin ОДЗ;\quad x_2=3$.



Точка максимума: $x=3$.

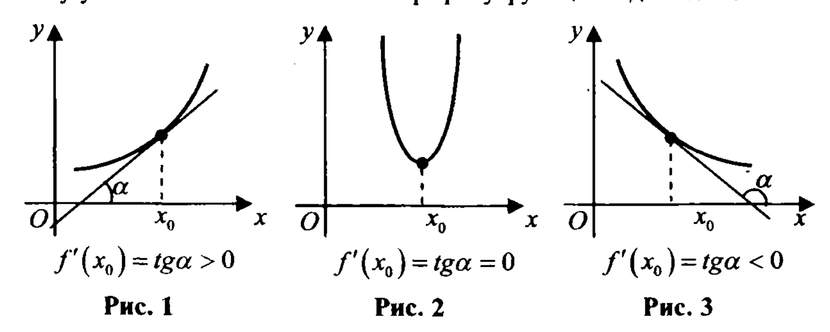
Ответ: 3.

§4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Геометрический смысл производной

Геометрический смысл производной состоит в том, что производная функции $y = f(x)$ в данной точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной $y = kx + b$ к графику функции в этой точке, то есть $k = f'(x_0)$.

Другими словами, производная функции в точке x_0 равняется тангенсу угла наклона касательной к графику функции в данной точке.



$f'(x_0) = tg\alpha > 0$ **Рис. 1**

$f'(x_0) = tg\alpha = 0$ **Рис. 2**

$f'(x_0) = tg\alpha < 0$ **Рис. 3**

Уравнение касательной (не вертикальной) имеет вид:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Таким образом, если прямая $y = kx + b$ пересекает ось абсцисс и является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, то угол α между этой прямой и положительным направлением оси абсцисс удовлетворяет соотношению:

$$k = tg\alpha = f'(x_0).$$

Тогда получаем, что угол α, отсчитываемый против часовой стрелки, определяется как:

$$\alpha = \begin{cases} arctg\, f'(x_0), & если\ f'(x_0) \geq 0 \\ \pi + arctg\, f'(x_0), & если\ f'(x_0) < 0 \end{cases}$$

Следует иметь ввиду, что если функция $f(x)$ не имеет производной в точке x_0, но непрерывна в этой точке, то у графика функции в этой точке либо вообще нет касательной, либо есть вертикальная касательная.

Например:

$y = |x|$ не имеет касательной в точке графика с абсциссой $x = 0$ (рис. 1);

$y = \sqrt[3]{x}$ имеет в точке графика с абсциссой $x = 0$ вертикальную касательную $x = 0$ (рис. 2).

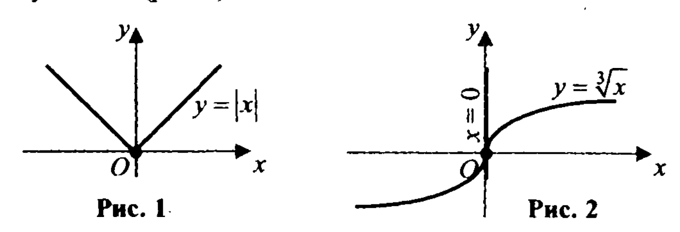
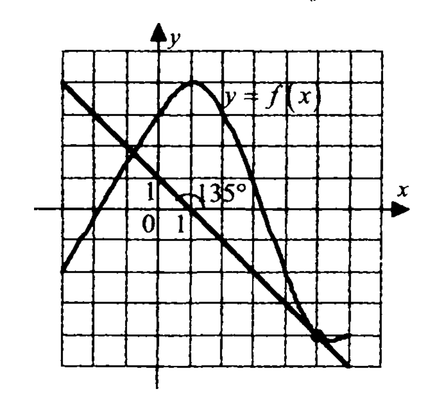


Рис. 1 **Рис. 2**

Рассмотрим примеры решения задач на составление уравнения касательной.

4.1. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите значение производной в точке с абсциссой $x_0 = 5$.



Решение:

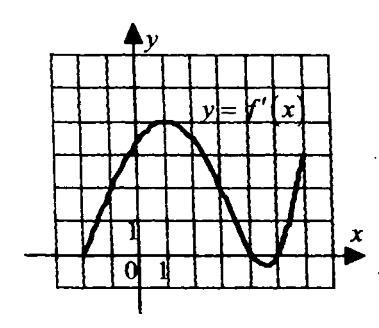
Требуется по графику функции $y = f(x)$ определить $f'(5)$.

Значение производной функции в точке $x = 5$ совпадает с тангенсом угла наклона касательной в этой точке к графику функции, то есть:

$f'(5) = tg135° = -1$.

Ответ: -1.

4.2. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.



Решение:

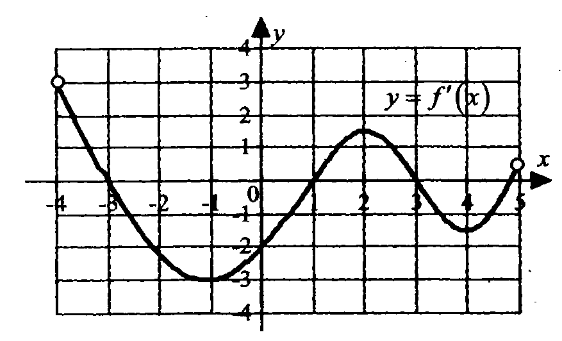
Тангенс угла наклона касательной: $tg\alpha = f'(x_0)$.

По графику функции определяем значение $f'(1) = 4$.

Тогда $tg\alpha = 4$.

Ответ: 4.

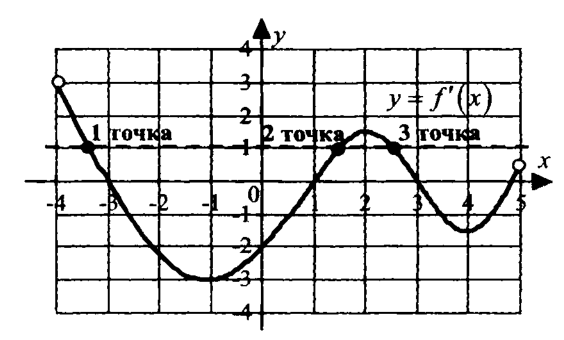
4.3. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4;5)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите число всех касательных, проведенных к графику функции $y = f(x)$, которые наклонены под углом $45°$ к положительному направлению оси абсцисс.



Решение:

Касательная должна быть наклонена под углом 45° к оси абсцисс, следовательно, значение производной функции в точке касания должно быть равно 1, так как:

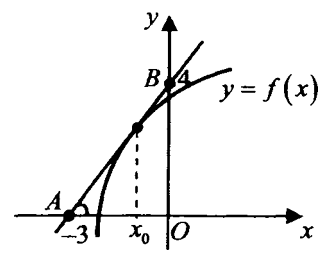
$f'(x_0) = tg45° = 1$.



На графике производной три точки, ордината которых равна 1, значит, таких касательных три.

Ответ: 3.

4.4. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке x_0. Найдите значение производной в точке x_0.



Решение:

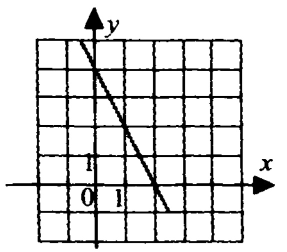
AB - касательная к графику функции $y = f(x)$.

Значение производной в точке x_0 совпадает с тангенсом угла наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс. В данном случае $tg\angle BAO$ можно найти по определению как отношение противолежащего катета BO к прилежащему катету AO в прямоугольном треугольнике AOB, то есть:

$$f'(x_0) = tg\angle BAO = \frac{BO}{AO} = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

4.5. Укажите функцию, для которой прямая, изображенная на рисунке, является касательной к ее графику в точке с абсциссой $x_0 = 0$.



1) $f(x) = \ln(1-x) - x + \frac{x^2}{4} + 4$ 2) $f(x) = \ln(x-1) - x - \frac{x^2}{4} - 4$

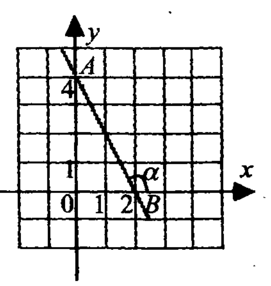
3) $f(x) = \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{4} - 4$ 4) $f(x) = \ln(x-1) + x + \frac{x^2}{4} + 4$

Решение:

Угловой коэффициент касательной:

$$k = tg\alpha = tg(180° - \angle ABO) =$$

$$= -tg\angle ABO = -\frac{4}{2} = -2.$$



Значит, требуется найти функцию, производная которой в точке $x_0 = 0$ равна -2.

При этом функции 2 и 4 можно сразу исключить, так как $x_0 = 0$ не входит в их область определения.

Найдем производные первой и третьей функции:

1) $f'(x) = -\frac{1}{1-x} - 1 + \frac{x}{2}$, $f'(0) = -2$;

3) $f'(x) = -\frac{1}{1-x} + 1 + \frac{x}{2}$, $f'(0) = 0$.

Таким образом, искомой функцией является функция 1.

Ответ: 1.

4.6. Какой угол с осью Ox образует касательная к графику функции $f(x)=\frac{ctg3x}{\sqrt{3}}$ в точке с абсциссой $x=-\frac{\pi}{6}$?

***Решение*:**

Тангенс угла наклона касательной определим исходя из геометрического смысла производной:

$tg\alpha = f'(x_0)$.

$$f'(x)=\left(\frac{ctg3x}{\sqrt{3}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 3x}\right)\cdot(3x)'=-\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 3x}$$

$$f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$$

Значит, $tg\alpha=-\sqrt{3}$, тогда $\alpha=\pi+arctg\left(-\sqrt{3}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

Ответ: $\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

4.7. Найдите координаты точек касания, в которых касательные к графику функции $f(x)=\frac{2x-2}{x+1}$ имеют угловой коэффициент, равный 4.

***Решение*:**

Угловой коэффициент касательной равен 4, значит, необходимо найти точки, в которых производная равна 4.

$f'(x)=\frac{4}{(x+1)^2}$: $\qquad \frac{4}{(x_0+1)^2}=4$

$$(x_0+1)^2=1$$

$$\left[\begin{array}{l} x_0+1=1, \\ x_0+1=-1; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x_0=0, \\ x_0=-2. \end{array}\right.$$

Если $x=0$, то $y=-2$. Если $x=-2$, то $y=6$.

Таким образом, точек касания, удовлетворяющих условию задачи, две: $(0;-2)$, $(-2;6)$.

Ответ: $(0;-2)$, $(-2;6)$.

4.8. В каких точках касательная к графику функции $f(x)=\sqrt{2x-1}$ образует с осью Ox угол $45°$?

Решение:

Касательная наклонена под углом $45°$, следовательно, значение производной в этой точке $f'(x_0)=tg45°$.

Найдем производную функции: $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

Тогда: $\frac{1}{\sqrt{2x_0-1}}=tg45°$.

Получаем уравнение: $\frac{1}{\sqrt{2x_0-1}}=1$.

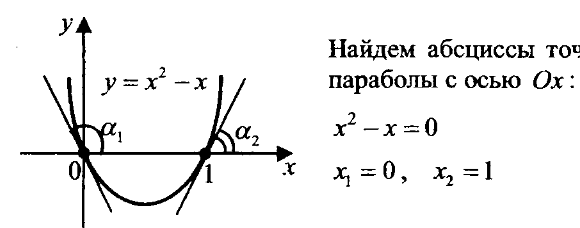
$2x_0-1=1$

$x_0=1,\ \ y_0=1$

Ответ: $(1;\ 1)$.

4.9. Найдите, под какими углами парабола $y=x^2-x$ пересекает ось абсцисс.

Решение:



Найдем абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox:

$x^2-x=0$

$x_1=0,\ \ x_2=1$

Замечание. Углом кривой с осью абсцисс называют угол, который касательная, проведенная в точке пересечения данной кривой с осью Ox, образует с положительным направлением оси абсцисс.

Вычислим угловые коэффициенты касательных к параболе в полученных точках:

$y'(x)=2x-1$; $y'(0)=-1$, $y'(1)=1$.

Тогда: $tg\alpha_1 = -1$, $\alpha_1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$tg\alpha_2 = 1$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$.

4.10. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ в точке $x_0 = -2$.

***Решение*:**

Уравнение касательной в точке графика функции с абсциссой x_0 имеет вид:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

По условию: $x_0 = -2$; $f(x_0) = f(-2) = -\frac{3}{2}$.

$$f'(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{1}{x^2}; \quad f'(x_0) = f'(-2) = \frac{5}{4}$$

Подставляя эти числа в уравнение касательной, получим:

$$y = \frac{5}{4}(x + 2) - \frac{3}{2}; \quad y = \frac{5}{4}x + 1.$$

Ответ: $y = \frac{5}{4}x + 1$.

4.11. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 5x^{-\frac{2}{5}} + 27$ в точке графика с ординатой 32.

***Решение*:**

Найдем абсциссу точки касания:

$$5x^{-\frac{2}{5}} + 27 = 32; \quad 5x^{-\frac{2}{5}} = 5; \quad x = 1.$$

Значит, $x_0 = 1$, $f(x_0) = 32$.

$$f'(x)=5\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)x^{-\frac{7}{5}}=-2x^{-\frac{7}{5}};\qquad f'(x_0)=f'(1)=-2$$

Получим искомое уравнение: $y=-2(x-1)+32=-2x+34$.

Ответ: $y=-2x+34$.

4.12. Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ в точке пересечения графика с осью абсцисс.

Решение:

Найдем точку пересечения графика с осью Ox:

$$\frac{x-1}{x^2+1}=0;\qquad x=1.$$

Таким образом, $x_0=1$, $f(x_0)=f(1)=0$.

$$f'(x)=\frac{1-x^2+2x}{\left(x^2+1\right)^2};\qquad f'(x_0)=f'(1)=\frac{1}{2}$$

Уравнение касательной: $y=\frac{1}{2}(x-1)+0=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

Ответ: $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

4.13. В какой точке пересекаются касательные к параболе $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$, проведенные в точках $(-1;\ 2)$ и $(2;\ 0,5)$?

Решение:

$y'=x-1$

Составим уравнение касательных:

$(-1;\ 2)$	$(2;\ 0,5)$
$y_1=-2(x+1)+2=-2x$	$y_2=1(x-2)+0,5=x-1,5$

Найдем координаты точки пересечения касательных.

$y_1=y_2$

$-2x=x-1,5$

$x=0{,}5$, $y=-1$

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\ -1\right)$.

4.14. Укажите все точки графика функции $y=x\cdot e^{-x^2}$, в которых касательная параллельна оси абсцисс.

Решение:

Замечание. Касательная к графику функции параллельна оси абсцисс, если ее угловой коэффициент равен 0. Так как $k=f'(x_0)$, то для определения искомых точек надо решить уравнение $f'(x_0)=0$.

$$f'(x)=(x)'\cdot e^{-x^2}+\left(e^{-x^2}\right)'\cdot x=e^{-x^2}+e^{-x^2}\cdot\left(-x^2\right)'\cdot x=e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$$

Получаем: $e^{-x_0^2}\left(1-2x_0^2\right)=0$.

$$\left[\begin{array}{l} e^{-x_0^2}=0, \\ 1-2x_0^2=0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \textit{решений нет}, \\ x_0=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

Определяем ординаты:

при $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$: $\quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2e}}$;

при $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$: $\quad y=-\frac{1}{\sqrt{2e}}$.

Ответ: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$.

4.15. При каком значении a прямая $y=3x+a$ является касательной к графику функции $y=2x^2-5x+1$?

Решение:

Так как прямая $y=3x+a$ является касательной к графику функции $y=2x^2-5x+1$, то в точке касания x_0 угловой коэффициент касательной равен 3.

Исходя из геометрического смысла производной $k = f'(x_0)$, значит $3 = 4x_0 - 5$.

Тогда $x_0 = 2$ – абсцисса точки касания.

Параметр a найдем из равенства значений функций $y = 3x + a$ и $y = 2x^2 - 5x + 1$ при $x_0 = 2$:

$3 \cdot 2 + a = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 1$

$a = -7$.

Ответ: при $a = -7$.

4.16. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{x}$, которая параллельна прямой $y = x - 5$.

Решение:

<u>*Замечание*</u>. Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$.

Касательная параллельна прямой $y = x - 5$, значит, их угловые коэффициенты совпадают, тогда $k = 1$.

Исходя из геометрического смысла производной: $k = f'(x_0) = 1$.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, тогда должно быть выполнено условие:

$\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}} = 1$ или $x_0 = \dfrac{1}{4}$.

Составим уравнение касательной:

$x_0 = \dfrac{1}{4}$, $f'(x_0) = 1$, $f(x_0) = \dfrac{1}{2}$;

$y = 1\left(x - \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{2} = x + \dfrac{1}{4}$.

Ответ: $y = x + \dfrac{1}{4}$.

4.17. Найдите точку, в которой касательная к графику функции $y = x^2$ перпендикулярна прямой $2x - y + 1 = 0$.

Решение:

Замечание. Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ взаимно перпендикулярны, если $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Угловой коэффициент прямой $y = 2x + 1$ есть $k_2 = 2$.

Из условия перпендикулярности находим:

$k_1 \cdot 2 = -1$; $\quad k_1 = -\frac{1}{2}$.

Угловой коэффициент касательной $k_1 = f'(x_0)$, значит $f'(x_0) = -\frac{1}{2}$.

$2x_0 = -\frac{1}{2}$; $\quad x_0 = -\frac{1}{4}$.

Касательная, проведенная к $y = x^2$, перпендикулярна прямой $y = 2x + 1$ только в точке $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{16}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{16}\right)$.

4.18. Найдите уравнения касательных к параболе $y = -x^2 + 3x - 2$, проходящих через точку $(1,5; 2,5)$.

Решение:

Найдем уравнение касательной для $y = -x^2 + 3x - 2$ в общем виде.

Пусть x_0 - абсцисса точки касания касательной и графика функции, тогда уравнение этой касательной:

$y(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

$y(x) = (-2x_0 + 3)(x - x_0) + (-x_0^2 + 3x_0 - 2)$

$y(x) = (-2x_0 + 3)x + x_0^2 - 2$

Так как $y(1,5) = 2,5$ можно составить уравнение:

$(-2x_0 + 3) \cdot 1,5 + x_0^2 - 2 = 2,5$

$x_0^2 - 3x_0 = 0$

$x_0 = 0$ или $x_0 = 3$.

В случае если $x_0 = 0$: $y = (-2\cdot 0 + 3)\cdot x + 0 - 2 = 3x - 2$.

В случае если $x_0 = 3$: $y = (-2\cdot 3 + 3)\cdot x + 9 - 2 = -3x + 7$.

Ответ: $y = 3x - 2$; $y = -3x + 7$.

4.19. В какой точке надо провести касательную к графику функции $y = x + \dfrac{3}{x}$, чтобы она пересекла ось ординат в точке $(0;\ 6)$?

Решение:

Точка $(0;\ 6)$ не принадлежит графику функции.

Составим уравнение касательной к графику функции, проходящей через некоторую точку $\left(x_0;\ x_0 + \dfrac{3}{x_0}\right)$ графика:

$$x_0 = x_0,\quad f(x_0) = x_0 + \frac{3}{x_0},\quad f'(x_0) = 1 - \frac{3}{x_0^2}.$$

$$y = \left(1 - \frac{3}{x_0^2}\right)(x - x_0) + x_0 + \frac{3}{x_0}$$

Так как касательная пересекает ось ординат в точке $(0;\ 6)$, значит, эти координаты удовлетворяют уравнению касательной.

$$6 = \left(1 - \frac{3}{x_0^2}\right)(0 - x_0) + x_0 + \frac{3}{x_0}$$

$$6 = -x_0 + \frac{3}{x_0} + x_0 + \frac{3}{x_0}$$

$x_0 = 1$, тогда ордината точки касания: $y_0 = 4$.

Ответ: $(1;\ 4)$.

4.20. Найдите уравнение общей касательной к графикам функций: $f(x) = x^2 - 5x + 6$ и $g(x) = x^2 + x + 1$.

Решение:

Замечание: Прямая $y = kx + b$ является касательной к параболе $y = ax^2 + bx + c$, тогда и только тогда, когда уравнение $kx + b = ax^2 + bx + c$ имеет единственное решение.

Получим два уравнения: $x^2 - 5x + 6 = kx + b$ и $x^2 + x + 1 = kx + b$, которые будут иметь единственные решения в случае, когда дискриминанты равны нулю.

1) $x^2 - 5x + 6 - kx - b = 0$

$x^2 - x(5 + k) + (6 - b) = 0$

$D = (5 + k)^2 - 4(6 - b)$

$k^2 + 10k + 1 + 4b = 0$

2) $x^2 + x + 1 - kx - b = 0$

$x^2 + x(1 - k) + (1 - b) = 0$

$D = (1 - k)^2 - 4(1 - b)$

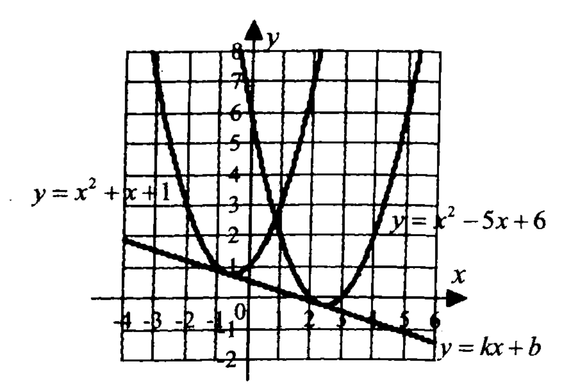
$k^2 - 2k - 3 + 4b = 0$

Решаем систему уравнений:

$$-\begin{cases} k^2 + 10k + 1 + 4b = 0, \\ k^2 - 2k - 3 + 4b = 0; \end{cases}$$

$$12k + 4 = 0$$

$$k = -\frac{1}{3}, \quad b = \frac{5}{9}.$$



Искомая касательная: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{9}$.

Ответ: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{9}$.

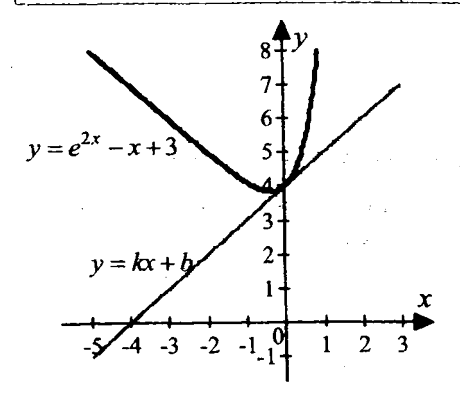
4.21. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = e^{2x} - x + 3$, образующей с осями координат равнобедренный прямоугольный треугольник.

Решение:

В равнобедренном прямоугольном треугольнике острые углы равны по $45°$, следовательно, угол наклона касательной к положительному направлением оси Ox составляет $45°$ или $135°$.

Рассмотрим два этих случая:

1) $\alpha = 45°$ $k = tg45° = 1$ $f'(x) = 2e^{2x} - 1$ $2e^{2x} - 1 = 1$ $e^{2x} = 1$ $x = 0$; $y(0) = e^0 - 0 + 3 = 4$ Уравнение касательной: $y = 1 \cdot (x - 0) + 4$ $y = x + 4$	2) $\alpha = 135°$ $k = tg135° = -1$ $f'(x) = 2e^{2x} - 1$ $2e^{2x} - 1 = -1$ $e^{2x} = 0$ Решений нет

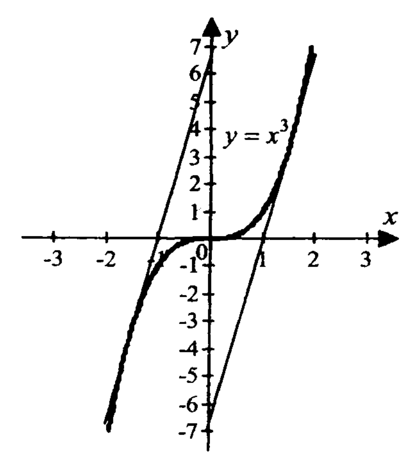


Ответ: $y = x + 4$.

4.22. К графику функции $y = x^3$ проведены две параллельные друг другу касательные. Длина отрезка, отсекаемая этими касательными на оси абсцисс равна 2. Найдите длину отрезка, который отсекают касательные на оси ординат.

Решение:

$y = x^3$ - нечетная функция, то есть ее график симметричен относительно начала координат. Так как длина отрезка, отсекаемого касательными на оси абсцисс равна 2, координаты точек пересечения касательных с осью абсцисс должны быть в силу симметрии: $(-1;0)$ и $(1;0)$.



Найдем уравнение касательной для $y = x^3$ в общем виде.

Пусть t - абсцисса точки касания касательной и графика функции, тогда уравнение данной касательной:

$y(x) = f'(t)(x-t) + f(t)$.

$y(x) = 3t^2(x-t) + t^3$

$y(x) = 3t^2 x - 2t^3$

Так как $y(1) = 0$, получаем уравнение:

$3t^2 - 2t^3 = 0$.

$t_1 = 0$ - не подходит по смыслу задачи, $t_2 = 1,5$

Уравнение касательной, проходящей через точку $(1;0)$:

$y(x)=6,75x-6,75$.

Координаты точки пересечения этой касательной с осью ординат: $(0;-6,75)$.

В силу нечетности функции $y=x^3$ получаем, что координаты точки пересечения с осью ординат второй касательной - $(0;6,75)$

Длина искомого отрезка равна 13,5.

Ответ: 13,5.

Физический смысл производной

Если материальная точка движется прямолинейно по закону $y=s(t)$, то производная функции $y'=s'(t)$ выражает мгновенную скорость материальной точки в момент времени t_0. То есть:

$$\upsilon=s'(t_0)$$

Для определенности будем считать, что путь измеряется в метрах, а время – в секундах.

4.23. Тело движется прямолинейно, его расстояние от начала отсчета изменяется по закону $s(t)=t^4+\frac{1}{3}t^3-t^2+8$. Чему будет равна мгновенная скорость через 3 секунды после начала движения?

Решение:

Исходя из физического смысла производной, найдем мгновенную скорость тела в произвольный момент времени t:

$\upsilon(t)=s'(t)=4t^3+t^2-2t$.

Тогда через 3 секунды после начала движения мгновенная скорость будет равна:

$\upsilon(3)=s'(3)=4\cdot3^3+3^2-2\cdot3=111$ м/с.

Ответ: 111 м/с.

4.24. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t)=t^3-\frac{13t^2}{2}+2t+4$. Найдите момент времени t_0, в который мгновенная скорость будет равна 12.

Решение:

Исходя из физического смысла производной:

$\upsilon(t)=s'(t)=3t^2-13t+2$.

По условию $\upsilon(t_0)=12$.

Получаем уравнение:

$3t_0^2-13t_0+2=12$

$3t_0^2-13t_0-10=0$

$t_1=-\frac{2}{3}$; $t_2=5$

По смыслу задачи $t\geq 0$, поэтому искомый момент времени $t=5$.

Ответ: 5 с.

4.25. Для машины, движущейся со скоростью 30 м/с, тормозной путь определяется формулой $s(t)=30t-16t^2$. В течение какого времени осуществляется торможение до полной остановки машины? Какое расстояние пройдет машина с начала торможения до полной остановки?

Решение:

В конце тормозного пути, когда материальная точка остановится, ее мгновенная скорость будет равна нулю, то есть $\upsilon(t_0)=0$.

Исходя из физического смысла производной: $\upsilon(t)=s'(t)=30-32t$.

$30-32t_0=0$; $t_0=\frac{15}{16}$ с.

Тормозной путь машины составит:

$$s\left(\frac{15}{16}\right)=30\cdot\frac{15}{16}-16\cdot\left(\frac{15}{16}\right)^2=\frac{15}{16}\cdot(30-15)=\frac{225}{16}=14\frac{1}{16} \text{ м.}$$

Ответ: $\frac{15}{16}$ с, $14\frac{1}{16}$ м.

4.26. Материальная точка движется по закону $x(t)=\frac{1}{3}t^3-t^2+9t+11$. Через сколько секунд после начала движения ускорение точки будет равно 10 м/с^2?

Решение:

Ускорение материальной точки - это изменение ее скорости, то есть чтобы найти ускорение материальной точки $a(t)$ в произвольный момент времени t, необходимо найти производную скорости.

$\upsilon(t)=x'(t)=t^2-2t+9$ определим t_0.

$a(t)=\upsilon'(t)=2t-2$

Найдем момент времени t_0, когда ускорение точки будет равно 10 м/с^2:

$2t_0-2=10$

$t_0=6$ с.

Ответ: 6 с.

4.27. Прямолинейные движения двух материальных точек заданы уравнениями:

$$s_1(t)=3t^2-5t-12 \quad \text{и} \quad s_2(t)=t^2-4t+16.$$

Найдите сумму мгновенных скоростей материальных точек в тот момент, когда пройденные ими расстояния равны.

Решение:

В момент времени, когда пройденные материальными точками расстояния равны, выполняется равенство:

$s_1(t)=s_2(t)$.

Получаем уравнение:

$3t^2-5t-12=t^2-4t+16$

$2t^2-t-28=0$

$t_1=-3,5$; $t_2=4$

Значение $t_1=-3,5$ не подходит по смыслу задачи, следовательно, искомый момент времени $t=4$.

Исходя из физического смысла производной, найдем мгновенные скорости материальных точек в произвольный момент времени t:

$\upsilon_1(t)=s_1'(t)=6t-5$;

$\upsilon_2(t)=s_2'(t)=2t-4$.

Подставив $t=4$, получим: $\upsilon_1(4)=19$, $\upsilon_2(4)=4$.

Тогда сумма мгновенных скоростей равна 23.

Ответ: 23.

4.28. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t)=-\frac{2}{3}t^3+\frac{25}{2}t^2+3t+\frac{1}{2}$. Найдите количество целых значений из промежутка времени, когда мгновенная скорость материальной точки не менее 60 м/с.

Решение:

Мгновенная скорость материальной точки:

$\upsilon(t)=s'(t)=-2t^2+25t+3$

Поскольку мгновенная скорость материальной точки должна быть не менее 60 м/с, имеет место неравенство:

$-2t^2+25t+3\geq 60$

$2t^2-25t+57\leq 0$

$(2t-19)(t-3)\leq 0$

$t\in[3;9,5]$.

Целые значения в этом промежутке: 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

Таких значений семь.

Ответ: 7.

4.29. Две материальные точки начали прямолинейное движение, заданное уравнениями $s_1(t)=t^3+15t-4$ и $s_2(t)=3t^3+2t^2+5t-6$.

Найдите отношение расстояний $\frac{s_1(t_0)}{s_2(t_0)}$ в момент t_0, когда их мгновенные скорости окажутся равными.

Решение:

В момент времени, когда мгновенные скорости материальных точек равны, выполняется равенство:

$\upsilon_1(t)=\upsilon_2(t)$.

Исходя из физического смысла производной:

$s_1'(t)=s_2'(t)$

Получаем уравнение:

$3t^2+15=9t^2+4t+5$

$6t^2+4t-10=0$

$3t^2+2t-5=0$

$t_1=-\frac{5}{3}$; $t_2=1$

Значение $t_1=-\frac{5}{3}$ не подходит по смыслу задачи, следовательно, искомый момент времени: $t_0=1$.

Найдем отношение: $\frac{s_1(1)}{s_2(1)}=\frac{1+15-4}{3+2+5-6}=\frac{12}{4}=3$.

Ответ: 3.

4.30. Две материальные точки движутся прямолинейно по законам движения $s_1(t)=t^3-16t^2-91t+5$ и $s_2(t)=2t^2-5t-6$. Найдите мгновенную скорость второй точки в момент, когда первая точка остановится.

Решение:

Первая точка остановится в момент, когда ее мгновенная скорость будет равна нулю, то есть $\upsilon_1(t)=0$.

Исходя из физического смысла производной:

$s_1'(t)=0$

Получаем уравнение:

$3t^2-32t-91=0$

$t_1 = -\frac{7}{3}$; $t_2 = 13$

Значение $t_1 = -\frac{7}{3}$ не подходит по смыслу задачи, следовательно, искомый момент времени: $t_0 = 13$.

Мгновенная скорость второй материальной точки в произвольный момент времени t:

$\upsilon_2(t) = s_2'(t) = 4t - 5$.

$\upsilon_2(13) = 4 \cdot 13 - 5 = 47$ м/с.

Ответ: 47 м/с.

4.31. Две материальные точки движутся прямолинейно по законам $s_1(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 7$ и $s_2(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 4$. Найдите расстояние от первой точки до начала отсчета в момент времени, когда их мгновенные скорости $\upsilon_1(t)$ и $\upsilon_2(t)$ относятся как $2:3$.

Решение:

По условию: $\frac{\upsilon_1(t_0)}{\upsilon_2(t_0)} = \frac{2}{3}$.

Найдем мгновенную скорость каждой материальной точки в произвольный момент времени t:

$\upsilon_1(t) = s_1'(t) = 3t^2 - 6t - 9$; $\upsilon_2(t) = s_2'(t) = 3t^2 - 6t + 9$.

Следовательно: $\frac{3t^2 - 6t - 9}{3t^2 - 6t + 9} = \frac{2}{3}$.

$3t^2 - 6t - 9 = 2t^2 - 4t + 6$

$t^2 - 2t - 15 = 0$

$t_1 = -3$; $t_2 = 5$

Искомый момент времени: $t_0 = 5$.

Найдем $s_1(5) = 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 9 \cdot 5 + 7 = 12$ м.

Ответ: 12 м.

§5. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ

Первообразная функции

Действие, обратное дифференцированию и заключающееся в нахождении всех таких функций $F(x)$, производная каждой из которых равна данной функции $f(x)$, называется *интегрированием.*

Определение 1. Функцию $y=F(x)$ называют **первообразной** функции $y=f(x)$ на заданном отрезке $[a;b]$. Если для всех $x\in[a;b]$ выполняется равенство:

$$F'(x)=f(x).$$

Основное свойство первообразных

Если функция $y=F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то функция $y=F(x)+C$, где C - постоянная, $C\in\mathbb{R}$, так же является первообразной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Таким образом, операция интегрирования в отличие от операции дифференцирования многозначна и если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на некотором промежутке, то существует бесконечно много первообразных $f(x)$ на этом промежутке. Все они имеют вид $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная.

Правила нахождения первообразных

1. Если $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$, а $G(x)$ - первообразная функции $g(x)$, то $F(x)+G(x)$ есть первообразная функции $f(x)+g(x)$.

2. Если $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$, а k - постоянная, то $k\cdot F(x)$ есть первообразная функции $k\cdot f(x)$.

3. Если $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$, а k и b - постоянные, причем $k\neq 0$, то $\frac{1}{k}\cdot F(kx+b)$ есть первообразная функции $f(kx+b)$.

Таблица первообразных

Функция $f(x)$	Общий вид Первообразных $F(x)$	Функция $f(x)$	Общий вид Первообразных $F(x)$
$k \quad (k \in \mathbb{R})$	$kx + C$	e^x	$e^x + C$
$x^p \quad (p \neq -1)$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$		
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcctg} x + C$

5.1. Найдите общий вид первообразных функций:

1) $f(x) = x + x^2 + 5x^4$

2) $f(x) = \frac{4}{x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^3} + 3$

3) $f(x) = (2x+3)^{12}$

4) $f(x) = (x-1)(x+3)^{32}$

5) $f(x) = 7\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 8x\sqrt[7]{x^2}$

6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{4x+1}$

7) $f(x) = \frac{3}{7x+1} + \sqrt[3]{\frac{3}{x}}$

8) $f(x) = \frac{x-3}{x+4}$

9) $f(x) = \frac{6x-1}{x+5}$

10) $f(x) = \frac{x^2+1}{x+3}$

11) $f(x) = \frac{1}{x^2(1+x^2)}$

12) $f(x) = \frac{2x^4 - 3x + 1}{x^5}$

13) $f(x)=\dfrac{8x-3}{\sqrt{8x+1}+2}$

14) $f(x)=(\sin x-\cos x)^2$

15) $f(x)=\sin x\cdot\cos 3x$

16) $f(x)=\sin^2 5x$

17) $f(x)=\sin^4 x$

18) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{e^x}}$

19) $f(x)=\left(2^x+2^{-x}\right)^3$

20) $f(x)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{3}\right)+\dfrac{3}{\sqrt{5x-2}}+\dfrac{1}{(3-2x)^3}$

21) $f(x)=3\cos\dfrac{x}{7}+2e^{3x-\frac{1}{2}}$

22) $f(x)=e^{2x}+3(x+1)^2-\dfrac{3}{\sin^2 3x}$

Решение:

1) $f(x)=x+x^2+5x^4=x^1+x^2+5x^4$

Воспользуемся правилом нахождения первообразной для суммы функций и формулой первообразной степенной функции.

Все первообразные функции $f_1(x)=x^1$ имеют вид $F_1(x)=\dfrac{x^{1+1}}{1+1}+C=\dfrac{x^2}{2}+C$, первообразные функции $f_2(x)=x^2$ имеют вид $F_2(x)=\dfrac{x^{2+1}}{2+1}+C=\dfrac{x^3}{3}+C$, первообразные функции $f_3(x)=5x^4$ имеют вид $F_3(x)=5\cdot\dfrac{x^{4+1}}{4+1}+C=x^5+C$.

Тогда все первообразные функции $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$ имеют вид: $F(x)=F_1(x)+F_2(x)+F_3(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+x^5+C$.

Ответ: $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+x^5+C$.

2) $f(x)=\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{4x^2}+\dfrac{1}{x^3}+3$

Преобразуем заданную функцию к виду: $f(x)=4\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\cdot x^{-2}+x^{-3}+3$.

Применяя последовательно правила 1 и 2 нахождения первообразных и пользуясь таблицей первообразных, найдем общий вид первообразных для заданной функции:

$$F(x)=4\cdot\ln|x|-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+3\cdot x+C;$$

$$F(x)=4\ln|x|-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^{-2}}{-2}+3x+C;$$

$$F(x)=4\ln|x|+\frac{1}{4x}-\frac{1}{2x^2}+3x+C.$$

Ответ: $F(x)=4\ln|x|+\frac{1}{4x}-\frac{1}{2x^2}+3x+C$.

3) $f(x)=(2x+3)^{12}$

Воспользуемся правилом нахождения первообразной для функции $y=f(kx+b)$. В нашем случае $k=2$, $b=3$.

Тогда: $F(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+3)^{12+1}}{12+1}+C;$

$$F(x)=\frac{1}{26}(2x+3)^{13}+C.$$

Ответ: $F(x)=\frac{1}{26}(2x+3)^{13}+C$.

4) $f(x)=(x-1)(x+3)^{32}$

Преобразуем заданную функцию, представив выражение $(x-1)$ как $(x+3-4)$, тогда исходная функция примет вид:

$$f(x)=(\overbrace{(x+3)-4}^{x-1})(x+3)^{32}=(x+3)\cdot(x+3)^{32}-4\cdot(x+3)^{32}=$$
$$=(x+3)^{33}-4(x+3)^{32}.$$

Найдем общий вид первообразных для полученной функции в соответствии с правилом нахождения первообразной для функции $y=f(kx+b)$, при условии, что $k=1$, $b=3$:

$$F(x)=\frac{(x+3)^{34}}{34}-\frac{4(x+3)^{33}}{33}+C.$$

Ответ: $F(x)=\frac{(x+3)^{34}}{34}-\frac{4(x+3)^{33}}{33}+C$.

5) $f(x)=7\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+8x\sqrt[7]{x^2}$

Преобразуем заданную функцию к виду:

$$f(x)=7\cdot x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}+8x^1\cdot x^{\frac{2}{7}}=7\cdot x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}+8x^{\frac{9}{7}}.$$

Найдем общий вид первообразных для функции $f(x)$:

$$F(x)=7\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1}+8\cdot\frac{x^{\frac{9}{7}+1}}{\frac{9}{7}+1}+C;$$

$$F(x)=7\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}+8\cdot\frac{x^{\frac{16}{7}}}{\frac{16}{7}}+C;$$

$$F(x)=7\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{5}\cdot x^{\frac{5}{4}}+8\cdot\frac{7}{16}\cdot x^{\frac{16}{7}}+C;$$

$$F(x)=\frac{14}{3}x\sqrt{x}+\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+\frac{7}{2}x^2\sqrt[7]{x^2}+C.$$

Ответ: $F(x)=\frac{14}{3}x\sqrt{x}+\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+\frac{7}{2}x^2\sqrt[7]{x^2}+C$.

6) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{4x+1}=x^{-\frac{1}{2}}+(4x+1)^{\frac{1}{2}}$

Для нахождения общего вида первообразных функции $y=(4x+1)^{\frac{1}{2}}$ воспользуемся правилом нахождения первообразной для функции $y=f(kx+b)$, $(k=4,\ b=1)$.

$$F(x)=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{(4x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C$$

$$F(x)=2\cdot x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot(4x+1)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$F(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{6}(4x+1)\sqrt{4x+1}+C$$

Ответ: $F(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{6}(4x+1)\sqrt{4x+1}+C$.

7) $f(x)=\frac{3}{7x+1}+\sqrt[3]{\frac{3}{x}}=3\cdot\frac{1}{7x+1}+\sqrt[3]{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=3\cdot\frac{1}{7x+1}+\sqrt[3]{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$

В данном случае $\sqrt[3]{3}$ можно рассматривать как числовой коэффициент.

Тогда: $F(x)=3\cdot\frac{1}{7}\cdot\ln|7x+1|+\sqrt[3]{3}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C$.

$$F(x)=\frac{3}{7}\ln|7x+1|+\sqrt[3]{3}\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C$$

$$F(x)=\frac{3}{7}\ln|7x+1|+\frac{3\sqrt[3]{3}}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}+C$$

$$F(x)=\frac{3}{7}\ln|7x+1|+\frac{3\sqrt[3]{3x^2}}{2}+C$$

Ответ: $F(x)=\frac{3}{7}\ln|7x+1|+\frac{3\sqrt[3]{3x^2}}{2}+C$.

8) $f(x)=\frac{x-3}{x+4}$

Представим заданную функцию в следующем виде:

$$f(x)=\frac{x-3}{x+4}=\frac{\overbrace{x+4-7}^{x-3}}{x+4}=\frac{x+4}{x+4}-\frac{7}{x+4}=1-\frac{7}{x+4}.$$

Согласно основному свойству первообразных, любая первообразная функции $f(x)$ имеет вид:

$$F(x)=x-7\ln|x+4|+C.$$

Ответ: $F(x)=x-7\ln|x+4|+C$.

9) $f(x)=\dfrac{6x-1}{x+5}$

По аналогии с предыдущим примером преобразуем заданную функцию путем выделения целой части:

$$f(x)=\frac{6x-1}{x+5}=\frac{\overbrace{(6x+30)-31}^{6x-1}}{x+5}=\frac{6(x+5)}{x+5}-\frac{31}{x+5}=6-\frac{31}{x+5}.$$

Общий вид первообразных для полученной функции:

$$F(x)=6x-31\ \ln|x+5|+C.$$

Ответ: $F(x)=6x-31\ \ln|x+5|+C$.

10) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+3}$

Преобразуем исходную функцию, разделив «столбиком» числитель на знаменатель с остатком:

$$\begin{array}{r|l}
x^2+1 & x+3 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{x^2+3x} & x-3 \quad (\textit{целая часть}) \\
-3x+1 & \\
-\ \underline{-3x-9} & \\
10 & \quad (\textit{остаток})
\end{array}$$

Тогда $f(x)$ можно переписать в виде:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x+3}=x-3+\frac{10}{x+3}.$$

Общий вид первообразных для полученной функции:

$$F(x)=\frac{x^2}{2}-3x+10\ln|x+3|+C.$$

Ответ: $F(x)=\frac{x^2}{2}-3x+10\ln|x+3|+C$.

11) $f(x)=\frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)}$

Преобразуем заданную функцию к виду:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}=x^{-2}-\frac{1}{1+x^2}.$$

Найдем общий вид первообразных полученной функции:

$$F(x)=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+\operatorname{arcctg}x+C \quad \text{или} \quad F(x)=-\frac{1}{x}+\operatorname{arcctg}x+C.$$

Ответ: $F(x)=-\frac{1}{x}+\operatorname{arcctg}x+C$.

12) $f(x)=\frac{2x^4-3x+1}{x^5}$

Преобразуем заданную функцию, разделив почленно числитель на знаменатель:

$$f(x)=\frac{2x^4}{x^5}-\frac{3x}{x^5}+\frac{1}{x^5}=\frac{2}{x}-\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^5}=2\cdot\frac{1}{x}-3x^{-4}+x^{-5}.$$

$$F(x)=2\ln x-3\frac{x^{-3}}{-3}+\frac{x^{-4}}{-4}+C \quad \text{или} \quad F(x)=2\ln x+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{4x^4}+C.$$

Ответ: $F(x)=2\ln x+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{4x^4}+C$.

13) $f(x)=\frac{8x-3}{\sqrt{8x+1}+2}$

Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю:

$$f(x)=\frac{8x-3}{\sqrt{8x+1}+2}\cdot\frac{\sqrt{8x+1}-2}{\sqrt{8x+1}-2}=\frac{(8x-3)\left(\sqrt{8x+1}-2\right)}{(8x+1-4)}=$$

$$=\frac{(8x-3)\left(\sqrt{8x+1}-2\right)}{(8x-3)}=\sqrt{8x+1}-2$$

Общий вид первообразных для функции $f(x)=\sqrt{8x+1}-2$:

$$F(x)=\frac{1}{8}\cdot\frac{(8x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-2x+C \quad \text{или} \quad F(x)=\frac{\sqrt{(8x+1)^3}}{12}-2x+C.$$

Ответ: $F(x)=\dfrac{\sqrt{(8x+1)^3}}{12}-2x+C$.

14) $f(x)=(\sin x-\cos x)^2=\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=1-\sin 2x$

$$F(x)=x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$$

Ответ: $F(x)=x+\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$.

15) $f(x)=\sin x\cdot\cos 3x$

Перейдем от произведения тригонометрических функций к сумме:

$$f(x)=\sin x\cdot\cos 3x=\frac{1}{2}\left(\sin(x+3x)+\sin(x-3x)\right)=\frac{1}{2}\sin 4x-\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Найдем общий вид первообразных:

$$F(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos 2x+C \quad \text{или} \quad F(x)=-\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

Ответ: $F(x)=-\dfrac{1}{8}\cos 4x+\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$.

16) $f(x)=\sin^2 5x$

Преобразуем функцию, воспользовавшись формулой понижения степени:

$$f(x)=\sin^2 5x=\frac{1-\cos 10x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 10x.$$

Общий вид первообразных для полученной функции будет:

$$F(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\sin 10x+C \quad \text{или} \quad F(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{20}\sin 10x+C.$$

Ответ: $F(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{20}\sin 10x+C$.

17) $f(x)=\sin^4 x$

Дважды воспользуемся формулой понижения степени:

$$f(x)=\left(\sin^2 x\right)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 4x=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x.$$

Общий вид первообразных полученной функции будет:

$$F(x)=\frac{3}{8}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x+C;$$

$$F(x)=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

Ответ: $F(x)=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$.

18) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{e^x}}$

Представим исходную функцию в следующем виде: $f(x)=e^{-\frac{x}{5}}$.

$$F(x)=\frac{1}{-\frac{1}{5}}\cdot e^{-\frac{x}{5}}+C; \quad F(x)=-5e^{-\frac{x}{5}}+C; \quad F(x)=-\frac{5}{\sqrt[5]{e^x}}+C.$$

Ответ: $F(x)=-\frac{5}{\sqrt[5]{e^x}}+C$.

19) $f(x)=\left(2^x+2^{-x}\right)^3$

$$f(x)=2^{3x}+3\cdot2^{2x}\cdot2^{-x}+3\cdot2^x\cdot2^{-2x}+2^{-3x}=2^{3x}+3\cdot2^x+3\cdot2^{-x}+2^{-3x}$$

$$F(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{3x}}{\ln2}+3\cdot\frac{2^x}{\ln2}-3\cdot\frac{2^{-x}}{\ln2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{-3x}}{\ln2}+C$$

$$F(x)=\frac{\left(2^3\right)^x}{\ln2^3}+3\cdot\frac{2^x}{\ln2}-3\cdot\frac{2^{-x}}{\ln2}-\frac{\left(2^3\right)^{-x}}{\ln2^3}+C$$

$$F(x)=\frac{8^x}{\ln8}+3\cdot\frac{2^x}{\ln2}-3\cdot\frac{2^{-x}}{\ln2}-\frac{8^{-x}}{\ln8}+C$$

Ответ: $F(x)=\frac{8^x}{\ln8}+3\cdot\frac{2^x}{\ln2}-3\cdot\frac{2^{-x}}{\ln2}-\frac{8^{-x}}{\ln8}+C$.

20) $f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)+\frac{3}{\sqrt{5x-2}}+\frac{1}{(3-2x)^3}$

$$f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)+3\cdot(5x-2)^{-\frac{1}{2}}+(3-2x)^{-3}$$

$$F(x)=2\cdot(-3)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)+3\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{(5x-2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{(3-2x)^{-3+1}}{-3+1}+C$$

$$F(x)=-6\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)+\frac{3}{5}\cdot2\cdot(5x-2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\cdot(3-2x)^{-2}+C$$

$$F(x)=6\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{6}{5}\sqrt{5x-2}+\frac{1}{4(3-2x)^2}+C$$

Ответ: $F(x)=6\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{6}{5}\sqrt{5x-2}+\frac{1}{4(3-2x)^2}+C$.

21) $f(x)=3\cos\frac{x}{7}+2e^{3x-\frac{1}{2}}$

$$F(x)=3\cdot7\cdot\sin\frac{x}{7}+2\cdot\frac{1}{3}\cdot e^{3x-\frac{1}{2}}+C$$

$$F(x)=21\sin\frac{x}{7}+\frac{2}{3}e^{3x-\frac{1}{2}}+C$$

Ответ: $F(x)=21\sin\frac{x}{7}+\frac{2}{3}e^{3x-\frac{1}{2}}+C$.

22) $f(x)=e^{2x}+3(x+1)^2-\frac{3}{\sin^2 3x}$

$$F(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}+3\cdot\frac{(x+1)^3}{3}+3\cdot\frac{1}{3}\cdot ctg3x+C$$

$$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+(x+1)^3+ctg3x+C$$

Ответ: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+(x+1)^3+ctg3x+C$.

5.2. Найдите все первообразные функции $f(x)=x|x+1|$.

Решение:

По определению модуля: $f(x)=\begin{cases} x^2+x, & x\ge -1; \\ -x^2-x, & x<-1. \end{cases}$

Первообразные для функции $f(x)$ сначала запишем в виде:

$$F(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C_1, & x\ge -1; \\ -\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+C_2, & x<-1. \end{cases}$$

Согласно определению первообразной, на всей числовой прямой должно быть выполнено равенство:

$$F'(x)=f(x),$$

то есть функция $F(x)$ должна быть дифференцируема в каждой точке x числовой прямой, в том числе и в точке $x=-1$.

Следовательно, функция $F(x)$ не может быть разрывной в точке $x=-1$ и имеет место равенство:

$$\left.\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C_1\right|_{x=-1}=\left.-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+C_2\right|_{x=-1};$$

$$-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+C_1=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+C_2;$$

$$C_2=C_1+\frac{1}{3}.$$

Тогда $F(x)$ следует переписать в виде:

$$F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C, & x\geq-1;\\ -\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}+C, & x<-1.\end{cases}$$

Ответ: $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C, & x\geq-1;\\ -\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}+C, & x<-1.\end{cases}$

5.3. Найдите первообразную функции $f(x)=3x^2+4x^3$, если известно, что $F(2)=15$.

Решение:

Общий вид первообразных заданной функции $f(x)$:

$$F(x)=3\cdot\frac{1}{3}x^3+4\cdot\frac{1}{4}x^4+C=x^3+x^4+C.$$

Из множества всех первообразных найдем ту, которая удовлетворяет соотношению $F(2)=15$.

$$2^3+2^4+C=15$$

$$C=15-8-16=-9$$

$$F(x)=x^3+x^4-9$$

Ответ: $F(x)=x^3+x^4-9$.

5.4. Найдите первообразную функции $f(x)=\dfrac{3x^3-4x^2+1}{x}$, график которой проходит через точку $M(1;7)$.

Решение:

$$f(x)=\frac{3x^3-4x^2+1}{x}=3x^2-4x+\frac{1}{x}$$

$F(x)=x^3-2x^2+\ln|x|+C$ - множество всех первообразных $f(x)$.

По условию график $F(x)$ проходит через точку с координатами $(1;7)$, следовательно, $F(1)=7$.

То есть: $1-2+\ln 1+C=7$, откуда $C=8$.

$F(x)=x^3-2x^2+\ln|x|+8$

Ответ: $F(x)=x^3-2x^2+\ln|x|+8$.

5.5. Найдите первообразную $F(x)$ функции $f(x)=\dfrac{6}{9-x^2}$, график которой проходит через точку $M(2;3)$.

Решение:

Представим функцию $f(x)$ в следующем виде:

$$f(x)=-\frac{6}{x^2-9}=\frac{-6}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-3}.$$

Тогда общий вид первообразных для полученной функции:

$$F(x)=\ln|x+3|-\ln|x-3|+C=\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|+C.$$

Из равенства $F(2)=3$ находим:

$$\ln\left|\frac{2+3}{2-3}\right|+C=3;$$

$$\ln 5+C=3;$$

$$C=3-\ln 5.$$

Таким образом, $F(x)=\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|+3-\ln 5$.

Ответ: $F(x)=\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|+3-\ln 5$.

5.6. Для функции $f(x)=\frac{1}{\cos^2 2x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{2};2\right)$.

Решение:

Общий вид первообразных для заданной функции $f(x)$:

$F(x)=\frac{1}{2}tg2x+C$.

Из множества всех первообразных $F(x)=\frac{1}{2}tg2x+C$ выберем ту, которая проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{2};2\right)$.

Для этого подставим координаты точки в выражение для первообразной $F(x)$ и определим из полученного уравнения $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$ значение константы C.

$\frac{1}{2}tg\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)+C=2$

$\frac{1}{2}tg\pi+C=2$

$0+C=2$

Таким образом, $C=2$, а $F(x)=\frac{1}{2}tg2x+2$.

Ответ: $F(x)=\frac{1}{2}tg2x+2$.

5.7. Найдите значение константы C первообразной функции $f(x)=\sin^3 x-\frac{\sin 2x}{2}(\sin x-\cos x)-\cos^3 x$, если $F(\pi)=2$.

Решение:

Упростим функцию $f(x)$:

$$f(x)=\sin^3 x-\cos^3 x-\frac{\sin 2x}{2}(\sin x-\cos x)=$$

$$=(\sin x-\cos x)\left(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x\right)-\frac{2\sin x\cos x}{2}(\sin x-\cos x)=$$

$$=(\sin x-\cos x)\left(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin x\cos x\right)=$$

$$=(\sin x-\cos x)\cdot 1=\sin x-\cos x.$$

Множество первообразных заданной функции имеет вид: $F(x)=-\cos x-\sin x+C$.

Определим из соотношения $F(\pi)=2$ значение константы C.

$$-\cos\pi-\sin\pi+C=2$$

$$1+C=2$$

$$C=1$$

Ответ: $C=1$.

5.8. Найдите ту первообразную функции $f(x)=-4x-3$, график которой касается прямой $y=3x-2$.

Решение:

Все первообразные функции $f(x)$ имеют вид:

$$F(x)=-2x^2-3x+C.$$

Графиками первообразных являются параболы. Парабола $F(x)=-2x^2-3x+C$ касается прямой $y=3x-2$ тогда и только тогда, когда имеет единственное решение уравнение:

$$-2x^2-3x+C=3x-2 \quad \text{или} \quad 2x^2+6x-(C+2)=0.$$

То есть дискриминант полученного уравнения должен быть равен нулю.

$D = 9 + 2 \cdot (C + 2) = 13 + 2C$

$13 + 2C = 0$

$C = -6,5$

Следовательно, $F(x) = -2x^2 - 3x - 6,5$.

Ответ: $F(x) = -2x^2 - 3x - 6,5$.

5.9. Один из нулей первообразной функции $f(x) = 2x + 4$ равен (-3). Найдите первообразную.

Решение:

Общий вид первообразных функции $f(x)$: $F(x) = x^2 + 4x + C$.

Если x_1 и x_2 - нули квадратичной функции $F(x)$, то:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4, \\ x_1 \cdot x_2 = C; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -3, \\ x_2 = -1, \\ C = 3. \end{cases}$$

$F(x) = x^2 + 4x + 3$

Ответ: $F(x) = x^2 + 4x + 3$.

5.10. Первообразная функции $f(x) = 3\cos 3x + 6\sin 6x$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$ принимает значение 5. Какое значение принимает эта же первообразная в точке $x = \frac{\pi}{6}$.

Решение:

Общий вид первообразных функции $f(x)$:

$$F(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}\sin 3x - 6 \cdot \frac{1}{6}\cos 6x + C = \sin 3x - \cos 6x + C.$$

Из условия $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$ определим значение константы C:

$\sin\frac{3\pi}{2}-\cos\frac{6\pi}{2}+C=5$;

$-1-(-1)+C=5$;

$C=5$.

Тогда: $F(x)=\sin 3x-\cos 6x+5$,

$F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{3\pi}{6}-\cos\frac{6\pi}{6}+5=\sin\frac{\pi}{2}-\cos\pi+5=1-(-1)+5=7$.

Ответ: 7.

5.11. График первообразной для функции $f(x)=\frac{5-2e^{2x}}{e^x}$ пересекает график функции $g(x)=10+7\cos x$ в точке, лежащей на оси ординат. Найдите константу C для первообразной $F(x)$.

Решение:

$f(x)=\frac{5-2e^{2x}}{e^x}=5e^{-x}-2e^x$

Общий вид первообразных функции $f(x)$:

$F(x)=-5e^{-x}-2e^x+C$.

По условию $F(x)=-5e^{-x}-2e^x+C$ и $g(x)=10+7\cos x$ пересекаются в точке, лежащей на оси Oy, то есть при $x=0$.

$g(0)=10+7\cdot\cos 0=17$, следовательно, функции $F(x)$ и $g(x)$ пересекаются в точке $(0;17)$.

Определим константу C из условия, что график первообразной $F(x)$ проходит через точку $(0;17)$, то есть $F(0)=17$.

$-5e^0-2e^0+C=17$

$-5-2+C=17$

$C=24$

Ответ: $C=24$.

5.12. Найдите целое число, наиболее близкое к значению $f(\pi)$, если известно, что $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$, а производная функции $y=f(x)$ имеет вид $f'(x)=\sin^2\frac{x}{2}$.

Решение:

Преобразуем производную функции:

$$f'(x)=\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x.$$

Найдем $f(x)$, вычислив первообразную: $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$.

По условию $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$, тогда:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{2}+C=\frac{1}{2};\quad \frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2};\quad C=-\frac{3\pi}{4}.$$

Искомая функция имеет вид: $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x-\frac{3\pi}{4}$.

$$f(\pi)=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\sin\pi-\frac{3\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}.$$

С учетом того, что $\pi\approx 3{,}14$, ближайшим целым числом к значению $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ является (-1).

Ответ: -1.

5.13. Найдите число значений переменной x из отрезка $[-1;1]$, при которых первообразная функции $f(x)=2\cos 2x$, проходящая через точку с координатами $\left(\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$, обращается в нуль.

Решение:

Общий вид первообразных для функции $f(x)$:

$$F(x)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 2x+C=\sin 2x+C.$$

По условию $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$, тогда:

$$\sin\frac{\pi}{2}+C=\frac{1}{2};\quad 1+C=\frac{1}{2};\quad C=-\frac{1}{2}.$$

Первообразная имеет вид: $F(x)=\sin 2x-\frac{1}{2}$.

Приравняем первообразную к нулю:

$$\sin 2x-\frac{1}{2}=0$$

$$\sin 2x=\frac{1}{2}$$

$$2x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$$

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\quad n\in\mathbb{Z}$$

$$x\in\left\{\ldots\ -\frac{11\pi}{12};\ -\frac{7\pi}{12};\ \frac{\pi}{12};\ \frac{5\pi}{12};\ \frac{13\pi}{12};\ \ldots\right\}$$

С учетом того, что $\pi\approx 3{,}14$, отрезку $[-1;1]$ принадлежит только один из полученных нулей первообразной, это $x=\frac{\pi}{12}$.

Ответ: 1.

Определение 2. Множество всех первообразных $F(x)+C$ для функции $f(x)$ на некотором промежутке называется **неопределенным интегралом** и обозначается:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C .$$

Таблица интегралов

$\int 0\,dx = C$	$\int dx = x + C$
$\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \neq -1)$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
Частные случаи: $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$.	
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$

Свойства неопределенного интеграла

Свойства неопределенного интеграла следуют из соответствующих свойств первообразных и определения.

1. Интеграл суммы равен сумме интегралов:

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx .$$

2. Постоянную можно выносить за знак интеграла:

$$\int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int f(x)\,dx,$$ где k – постоянная.

3. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, а k - произвольное число, $k \neq 0$, то

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C.$$

4. Производная от интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

5.14. Найдите:

1) $\int x\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)dx$

2) $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{x}dx$

3) $\int \frac{\left(4+\sqrt{x}\right)\left(x^3+5\right)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

4) $\int \frac{1}{x^2-x-6}dx$

5) $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+4}$

6) $\int (4-3x)^5\,dx$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x-2}}$

8) $\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}dx$

9) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

10) $\int \frac{\cos^2 x+2\cos x-3}{3+\cos x}dx$

11) $\int tg^2 x\,dx$

12) $\int \cos 6x \cos 4x\,dx$

13) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx$

14) $\int \left(\cos^6 2x+\sin^6 2x\right)dx$

15) $\int \frac{8^x-9^x}{6^x}dx$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

17) $\int \frac{dx}{1+(2x+3)^2}$

18) $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$

19) $\int \left(\cos(3-2x)+\frac{1}{3x+2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\right)dx$

Решение:

1) $\int x\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)dx$

Преобразовав подынтегральное выражение, получим:

$$\int x\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)dx=\int\left(2+\frac{x^2}{2}\right)dx=2\int dx+\frac{1}{2}\int x^2\,dx=2x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+C=$$

$$=2x+\frac{x^3}{6}+C$$

Ответ: $2x+\frac{x^3}{6}+C$.

2) $\int\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{x}dx$

$$\int\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{x}dx=\int\frac{1+2\sqrt{x}+x}{x}dx=\int\frac{1}{x}dx+2\int\frac{\sqrt{x}}{x}dx+\int\frac{x}{x}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{x}+2\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\int dx=\ln|x|+2\cdot\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}}+x+C=\ln|x|+4\sqrt{x}+x+C$$

Ответ: $\ln|x|+4\sqrt{x}+x+C$.

3) $\int\frac{\left(4+\sqrt{x}\right)\left(x^3+5\right)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

$$\int\frac{\left(4+\sqrt{x}\right)\left(x^3+5\right)}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int\frac{4x^3+x^3\sqrt{x}+5\sqrt{x}+20}{\sqrt[3]{x^2}}dx=$$

$$=\int\left(4x^{3-\frac{2}{3}}+x^{3+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}+5x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}+20x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=$$

$$=\int\left(4x^{\frac{7}{3}}+x^{\frac{17}{6}}+5x^{-\frac{1}{6}}+20x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=$$

$$=4\cdot\frac{x^{\frac{7}{3}+1}}{\frac{7}{3}+1}+\frac{x^{\frac{17}{6}+1}}{\frac{17}{6}+1}+5\cdot\frac{x^{-\frac{1}{6}+1}}{-\frac{1}{6}+1}+20\cdot\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}=$$

$$=\frac{6}{5}x^{\frac{10}{3}}+\frac{6}{23}x^{\frac{23}{6}}+6x^{\frac{5}{6}}+60x^{\frac{1}{3}}+C$$

Ответ: $\frac{6}{5}x^{\frac{10}{3}}+\frac{6}{23}x^{\frac{23}{6}}+6x^{\frac{5}{6}}+60x^{\frac{1}{3}}+C$.

4) $\int\frac{1}{x^2-x-6}dx$

$$\int\frac{1}{x^2-x-6}dx=\int\frac{1}{(x-3)(x+2)}dx$$

Разность выражений $(x+2)$ и $(x-3)$ равна 5, поэтому, умножим и разделим подынтегральное выражение на 5:

$$\int\frac{1}{(x-3)(x+2)}\cdot\frac{5}{5}dx=\frac{1}{5}\int\frac{5}{(x-3)(x+2)}dx=\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}dx=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\ln|x-3|-\ln|x+2|\right)+C=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C$$

Ответ: $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C$.

5) $\int\frac{x^4\,dx}{x^2+4}$

$$\int\frac{x^4\,dx}{x^2+4}=\int\frac{(x^4-16)+16}{x^2+4}dx=\int\frac{x^4-16}{x^2+4}dx+\int\frac{16}{x^2+4}dx=$$

$$=\int(x^2-4)\,dx+16\int\frac{dx}{x^2+4}=\frac{x^3}{3}-4x+16\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C$$

Ответ: $\frac{x^3}{3}-4x+8\,arctg\frac{x}{2}+C$.

6) $\int(4-3x)^5\,dx$

В соответствии с правилом нахождения неопределенного интеграла от функции $f(kx+b)$:

$$\int(4-3x)^5\,dx=\frac{1}{-3}\frac{(4-3x)^6}{6}+C=-\frac{(4-3x)^6}{18}+C.$$

Ответ: $-\frac{(4-3x)^6}{18}+C$.

7) $\int\frac{dx}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x-2}}$

Умножим числитель и знаменатель подынтегральной функции на выражение, сопряженное знаменателю, получим:

$$\int\frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x-2}}{\left(\sqrt{4x+1}\right)^2-\left(\sqrt{4x-2}\right)^2}\,dx=\int\frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x-2}}{3}\,dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int(4x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx-\frac{1}{3}\int(4x-2)^{\frac{1}{2}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{(4x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{(4x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{18}\left(\sqrt{(4x+1)^3}-\sqrt{(4x-2)^3}\right)+C$$

Ответ: $\frac{1}{18}\left(\sqrt{(4x+1)^3}-\sqrt{(4x-2)^3}\right)+C$.

8) $\int\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}\,dx$

$$\int\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}\,dx=\int\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x}\,dx=\int(1+\sin x)\,dx=$$

$$=x-\cos x+C$$

Ответ: $x-\cos x+C$.

9) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot tg\frac{x}{2} + C = tg\frac{x}{2} + C$$

Ответ: $tg\frac{x}{2} + C$.

10) $\int \frac{\cos^2 x + 2\cos x - 3}{3+\cos x}dx$

$$\int \frac{\cos^2 x + 2\cos x - 3}{3+\cos x}dx = \int \frac{(\cos x + 3)(\cos x - 1)}{3+\cos x}dx = \int (\cos x - 1)\,dx =$$

$$= \sin x - x + C$$

Ответ: $\sin x - x + C$.

11) $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx$

$$\int \mathrm{tg}^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \mathrm{tg}\,x - x + C$$

Ответ: $\mathrm{tg}\,x - x + C$.

12) $\int \cos 6x \cos 4x\,dx$

$$\int \cos 6x \cos 4x\,dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos(6x+4x) + \cos(6x-4x)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos 10x + \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\sin 10x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C =$$

$$= \frac{1}{20}\sin 10x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Ответ: $\frac{1}{20}\sin 10x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

13) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}\, dx$

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}\, dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}\, dx =$$

$$= \int \left(\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C$$

Ответ: $-\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C$.

14) $\int \left(\cos^6 2x + \sin^6 2x \right) dx$

$$\int \left(\cos^2 2x + \sin^2 2x \right)\left(\cos^4 2x - \cos^2 2x \sin^2 2x + \sin^4 2x \right) dx =$$

$$= \int \left(\left(\cos^2 2x + \sin^2 2x \right)^2 - 3\cos^2 2x \sin^2 2x \right) dx =$$

$$= \int \left(1 - \frac{3}{4}(2\cos 2x \sin 2x)^2 \right) dx = \int \left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 4x \right) dx =$$

$$= \int \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1-\cos 8x}{2} \right) dx = \int \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cdot \cos 8x \right) dx = \frac{5}{8}x + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8}\sin 8x + C =$$

$$= \frac{5}{8}x + \frac{3}{64}\sin 8x + C$$

Ответ: $\frac{5}{8}x + \frac{3}{64}\sin 8x + C$.

15) $\int \frac{8^x - 9^x}{6^x}\, dx$

$$\int \frac{8^x - 9^x}{6^x}\, dx = \int \left(\frac{8^x}{6^x} - \frac{9^x}{6^x} \right) dx = \int \left(\left(\frac{8}{6} \right)^x - \left(\frac{9}{6} \right)^x \right) dx =$$

$$=\int\left(\left(\frac{4}{3}\right)^x-\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)dx=\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^x}{\ln\frac{4}{3}}-\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\frac{3}{2}}+C$$

Ответ: $\dfrac{\left(\frac{4}{3}\right)^x}{\ln 4-\ln 3}-\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln 3-\ln 2}+C$.

16) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}}=\frac{1}{2}\arcsin 2x+C$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}\arcsin 2x+C$.

17) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+(2x+3)^2}$

$$\int\frac{dx}{1+(2x+3)^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x+3)+C$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x+3)+C$.

18) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-6x+18}$

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+18}=\int\frac{dx}{x^2-6x+9+9}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+9}=$$

$$=\int\frac{dx}{3^2+(x-3)^2}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{3}+C$$

Ответ: $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x-3}{3}+C$.

19) $\int\left(\cos(3-2x)+\frac{1}{3x+2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\right)dx$

$$\int\left(\cos(3-2x)+\frac{1}{3x+2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\right)dx=\frac{1}{-2}\sin(3-2x)+\frac{1}{3}\ln|3x+2|+$$

$$+\int x^{-\frac{5}{3}}\,dx=-\frac{1}{2}\sin(3-2x)+\frac{\ln|3x+2|}{3}+\frac{x^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\sin(2x-3)+\frac{\ln|3x+2|}{3}-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}+C$$

Ответ: $\frac{1}{2}\sin(2x-3)+\frac{\ln|3x+2|}{3}-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}+C$.

Определенный интеграл

Определенный интеграл обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Для вычисления определенного интеграла применяется **формула Ньютона – Лейбница**:

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)$ - ее первообразная, то верно равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Другими словами, определенный интеграл от функции $f(x)$ на заданном отрезке $[a;b]$ равен приращению любой ее первообразной $F(x)$ на этом отрезке.

Основные правила вычисления определенных интегралов

1. $\int\limits_a^b k\cdot f(x)\,dx=k\cdot\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где $k-const$

2. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)\,dx$

3. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$, где $ñ \in [a;b]$

4. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$

5. $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$

5.15. Вычислите:

1) $\int\limits_{-1}^{2} (x^2 - 6x + 9)\,dx$

2) $\int\limits_{1}^{2} \frac{1 - 8x^3}{1 - 2x}\,dx$

3) $\int\limits_{1}^{2} \frac{2x^5 - x^3 - 8}{x^3}\,dx$

4) $\int\limits_{0}^{8} x \cdot \sqrt[3]{x}\,dx$

5) $\int\limits_{0}^{1} \frac{9x^2 - 1 - \sqrt{3x+1}}{3x+1}\,dx$

6) $\int\limits_{0}^{9} \frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1}\,dx$

7) $\int\limits_{-18}^{3} \sqrt[3]{2 - \frac{x}{3}}\,dx$

8) $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{dx}{x}$

9) $\int\limits_{2}^{8} \frac{dx}{0,5x - 5}$

10) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x^2 - 3x - 4}$

11) $\int\limits_{2}^{3} \frac{x^2 + 3}{x + 1}\,dx$

12) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{x}{3} \cdot \cos\frac{x}{3}\,dx$

13) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} tg^2 x\,dx$

14) $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{4}\right)dx$

15) $\int\limits_{0}^{0{,}25}\left(1-\frac{\pi}{\cos^2 \pi x}\right)dx$

16) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)dx$

17) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos x \sin 2x \cos 3x\, dx$

18) $\int\limits_{0}^{1}\frac{e^x+e^{-1}}{e^{x-1}}\,dx$

19) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}$

20) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$

Решение:

1) $\int\limits_{-1}^{2}\left(x^2-6x+9\right)dx=\int\limits_{-1}^{2}(x-3)^2\,dx=\left.\frac{(x-3)^3}{3}\right|_{-1}^{2}=-\frac{1}{3}+\frac{64}{3}=21$

Ответ: 21.

2) $\int\limits_{1}^{2}\frac{1-8x^3}{1-2x}\,dx=\int\limits_{1}^{2}\frac{(1-2x)\left(1+2x+4x^2\right)}{1-2x}\,dx=\int\limits_{1}^{2}\left(1+2x+4x^2\right)dx=$

$=\left.\left(x+x^2+\frac{4x^3}{3}\right)\right|_{1}^{2}=\left(2+4+\frac{32}{3}\right)-\left(1+1+\frac{4}{3}\right)=13\frac{1}{3}$

Ответ: $13\frac{1}{3}$.

3) $\int\limits_{1}^{2}\frac{2x^5-x^3-8}{x^3}\,dx=\int\limits_{1}^{2}\left(2x^2-1-\frac{8}{x^3}\right)dx=\int\limits_{1}^{2}\left(2x^2-1-8x^{-3}\right)dx=$

$=\left.\left(\frac{2x^3}{3}-x-8\cdot\frac{x^{-2}}{-2}\right)\right|_{1}^{2}=\left.\left(\frac{2x^3}{3}-x+\frac{4}{x^2}\right)\right|_{1}^{2}=$

$=\left(\frac{16}{3}-2+1\right)-\left(\frac{2}{3}-1+4\right)=\frac{2}{3}$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

4) $\int\limits_0^8 x\cdot\sqrt[3]{x}\,dx=\int\limits_0^8 x^{\frac{4}{3}}\,dx=\frac{3}{7}\cdot x^{\frac{7}{3}}\Big|_0^8=\frac{3}{7}\cdot\sqrt[3]{x^7}\Big|_0^8=\frac{3}{7}\sqrt[3]{8^7}-0=$

$=\frac{3}{7}\cdot 2^7=\frac{3}{7}\cdot 128=54\frac{6}{7}$

Ответ: $54\frac{6}{7}$.

5) $\int\limits_0^1 \frac{9x^2-1-\sqrt{3x+1}}{3x+1}\,dx=\int\limits_0^1\left(\frac{9x^2-1}{3x+1}-\frac{\sqrt{3x+1}}{3x+1}\right)dx=$

$=\int\limits_0^1\left(\frac{(3x-1)(3x+1)}{3x+1}-\frac{\sqrt{3x+1}}{3x+1}\right)dx=\int\limits_0^1\left(3x-1-\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\right)dx=$

$=\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\right)\Big|_0^1=\left(\frac{3}{2}-1-\frac{4}{3}\right)-\left(0-0-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{6}$

Ответ: $-\frac{1}{6}$.

6) $\int\limits_0^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\,dx=\int\limits_0^9\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}\,dx=\int\limits_0^9(\sqrt{x}-1)\,dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\right)\Big|_0^9=$

$=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x\right)\Big|_0^9=\frac{2}{3}\cdot 27-9-0=9$

Ответ: 9.

7) $\int\limits_{-18}^3\sqrt[3]{2-\frac{x}{3}}\,dx=\int\limits_{-18}^3\left(2-\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3}}dx=-3\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(2-\frac{x}{3}\right)^{\frac{4}{3}}\Bigg|_{-18}^3=$

$=-\frac{9}{4}\left(2-\frac{x}{3}\right)\sqrt[3]{2-\frac{x}{3}}\Bigg|_{-18}^3=-\frac{9}{4}(1-8\cdot 2)=\frac{135}{4}=33\frac{3}{4}$

Ответ: $33\frac{3}{4}$.

8) $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_{\frac{1}{e}}^{e} = \ln e - \ln\frac{1}{e} = 1-(-1) = 2$

Ответ: 2.

9) $\int\limits_{2}^{8} \frac{dx}{0,5x-5} = 2\ln|0,5x-5| \Big|_{2}^{8} = 2\ln 1 - 2\ln 4 = 0 - \ln 4^2 = \ln\frac{1}{16}$

Ответ: $\ln\frac{1}{16}$.

10) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x^2-3x-4} = \int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{(x-4)(x+1)} = \frac{1}{5}\int\limits_{2}^{3} \frac{5}{(x-4)(x+1)}dx =$

$= \frac{1}{5}\int\limits_{2}^{3}\left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{5}\left(\ln|x-4| - \ln|x+1|\right)\Big|_{2}^{3} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-4}{x+1}\right|\Big|_{2}^{3} =$

$= \frac{1}{5}\left(\ln\frac{1}{4} - \ln\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{5}\left(\ln\left(\frac{1}{4} : \frac{2}{3}\right)\right) = \frac{1}{5}\ln\frac{3}{8}$

Ответ: $\frac{1}{5}\ln\frac{3}{8}$.

11) $\int\limits_{2}^{3} \frac{x^2+3}{x+1}dx = \int\limits_{2}^{3} \frac{x^2-1+4}{x+1}dx = \int\limits_{2}^{3} \frac{(x+1)(x-1)+4}{x+1}dx =$

$= \int\limits_{2}^{3}\left(x-1+\frac{4}{x+1}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - x + 4\ln|x+1|\right)\Big|_{2}^{3} =$

$= \left(\frac{9}{2} - 3 + 4\ln 4\right) - (2-2+4\ln 3) = 1,5 + 4\ln\frac{4}{3}$

Ответ: $1,5+4\ln\frac{4}{3}$.

12) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{2x}{3}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\left(-\cos\frac{2x}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{4}\cos\frac{2x}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \frac{3}{4}\cos 0 =$

$= -\frac{3}{8} + \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

Ответ: $\frac{3}{8}$.

13) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2 x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$

$= (\operatorname{tg} x - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - (\operatorname{tg} 0 - 0) = 1 - \frac{\pi}{4}$

Ответ: $1 - \frac{\pi}{4}$.

14) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{4}\right)dx = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\frac{x}{4}\,dx = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1+\cos\frac{x}{2}}{2}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left(x + 2\sin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$

$= \frac{1}{2}(2\pi + 2\sin\pi) - \frac{1}{2}(0 + 2\sin 0) = \pi$

Ответ: π.

15) $\int\limits_0^{0,25}\left(1 - \frac{\pi}{\cos^2 \pi x}\right)dx = \left(x - \pi\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\operatorname{tg}\pi x\right)\Bigg|_0^{0,25} = (x - \operatorname{tg}\pi x)\Big|_0^{0,25} =$

$= \left(\frac{1}{4} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) - (0 - \operatorname{tg} 0) = -\frac{3}{4}$

Ответ: $-0,75$.

16) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)dx=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)dx=$

$=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{3}-\frac{1}{2}\sin\pi=-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$

Ответ: $-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

17) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \sin 2x \cos 3x\, dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 4x)\sin 2x\, dx=$

$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x\cos 2x+\sin 2x\cos 4x)\, dx=$

$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{2}(\sin(-2x)+\sin 6x)\right)dx=$

$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} (-\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x)\, dx=$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{6}\cos 6x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{4}\cos\frac{4\pi}{3}-\frac{1}{6}\cos 2\pi-\frac{1}{2}\cos 0+\frac{1}{4}\cos 0+\frac{1}{6}\cos 0\right)=$

$=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)=-\frac{3}{32}$

Ответ: $-\frac{3}{32}$.

18) $\int\limits_0^1 \frac{e^x + e^{-1}}{e^{x-1}}\,dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{e^x}{e^{x-1}} + \frac{e^{-1}}{e^{x-1}}\right) dx = \int\limits_0^1 \left(e + e^{-x}\right) dx =$

$$= \left(ex - e^{-x}\right) \Big|_0^1 = \left(e - \frac{1}{e}\right) - (0-1) = e - \frac{1}{e} + 1$$

Ответ: $e - \frac{1}{e} + 1$.

19) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \operatorname{arctg}(x+1) \Big|_{-1}^0 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

20) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3 + 4x - 4x^2}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - 1 + 4x - 4x^2}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - (2x-1)^2}} =$

$$= \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x-1}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{2} - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

Замечание. Если подынтегральная функция представляет собой выражение, содержащее переменную под знаком модуля, то вычисление определенного интеграла с данными пределами интегрирования путем раскрытия модуля по определению можно свести к вычислению суммы определенных интегралов с подынтегральными функциями, уже не содержащими переменную под знаком модуля, .

5.16. Вычислите:

1) $\int\limits_0^2 \sqrt{x^2 - 2x + 1}\,dx$ **2)** $\int\limits_{-2}^1 \left(|x+1| + |x|\right) dx$

3) $\int\limits_0^{4\pi} \sqrt{1 - \cos x}\,dx$ **4)** $\int\limits_0^6 \big||x-3| - 2\big|\,dx$

Решение:

1) $\int_0^2 \sqrt{x^2-2x+1}\,dx = \int_0^2 \sqrt{(x-1)^2}\,dx = \int_0^2 |x-1|\,dx$

$x-1$: на $[0;1]$ «$-$», на $[1;2]$ «$+$»; точки 0, 1, 2 на оси x.

По определению модуля: $|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \ge 1; \\ 1-x, & x < 1. \end{cases}$

Разобьем отрезок $[0;2]$ на два отрезка $[0;1]$ и $[1;2]$ и воспользуемся свойством 3 определенного интеграла:

$$\int_0^2 |x-1|\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_1^2$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} - 0\right) + \left(2 - 2 - \frac{1}{2} + 1\right) = 1$$

Ответ: 1.

2) $\int_{-2}^{1} (|x+1| + |x|)\,dx$

$x+1$: на $[-2;-1]$ «$-$», на $[-1;0]$ «$+$», на $[0;1]$ «$+$»;
x: на $[-2;-1]$ «$-$», на $[-1;0]$ «$-$», на $[0;1]$ «$+$»; точки -2, -1, 0, 1 на оси x.

Таким образом:

$$|x+1| + |x| = \begin{cases} -x-1-x, & x \le -1; \\ x+1-x, & -1 < x < 0; \\ x+1+x, & x \ge 0; \end{cases} = \begin{cases} -2x-1, & x \le -1; \\ 1, & -1 < x < 0; \\ 2x+1, & x \ge 0. \end{cases}$$

Разобьем отрезок $[-2;1]$ на три отрезка $[-2;-1]$, $[-1;0]$ и $[0;1]$, и воспользуемся свойством 3 определенного интеграла:

$$\int_{-2}^{1} (|x+1| + |x|)\,dx = \int_{-2}^{-1} (-2x-1)\,dx + \int_{-1}^{0} dx + \int_0^1 (2x+1)\,dx =$$

$$=\left(-x^2-x\right)\Big|_{-2}^{-1}+x\Big|_{-1}^{0}+\left(x^2+x\right)\Big|_{0}^{1}=$$

$$=\left(-1+1+4-2\right)+\left(0+1\right)+\left(1+1-0\right)=5$$

Ответ: 5.

3) $$\int_0^{4\pi}\sqrt{1-\cos x}\,dx=\int_0^{4\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}\,dx=\sqrt{2}\int_0^{4\pi}\left|\sin\frac{x}{2}\right|dx=$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\underbrace{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}_{+}dx+\sqrt{2}\int_{2\pi}^{4\pi}\underbrace{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}_{-}dx=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sin\frac{x}{2}\,dx-\sqrt{2}\int_{2\pi}^{4\pi}\sin\frac{x}{2}\,dx=$$

$$=-2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi}+2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\Big|_{2\pi}^{4\pi}=-2\sqrt{2}\left(-1-1\right)+2\sqrt{2}\left(1+1\right)=8\sqrt{2}$$

Ответ: $8\sqrt{2}$.

4) Сначала раскроем внутренний модуль, затем внешний:

$$\int_0^6\big||x-3|-2\big|\,dx=\int_0^3\left|-(x-3)-2\right|dx+\int_3^6\left|(x-3)-2\right|dx=$$

$$=\int_0^3|1-x|\,dx+\int_3^6|x-5|\,dx=$$

$$=\int_0^1(1-x)\,dx+\int_1^3(x-1)\,dx+\int_3^5(5-x)\,dx+\int_5^6(x-5)\,dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^3+\left(5x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_3^5+\left(\frac{x^2}{2}-5x\right)\Big|_5^6=$$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{25}{2}-\frac{21}{2}\right)+\left(-12+\frac{25}{2}\right)=5$$

Ответ: 5.

Рассмотрим задачи, которые решаются с использованием свойств первообразных и интегралов.

5.17. Решите уравнение: $\int_0^2 (x-2)\,dx = y^2 + 3y$.

Решение:

Вычислим интеграл: $\int_0^2 (x-2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_0^2 = (2-4) - 0 = -2$.

Решим полученное уравнение: $-2 = y^2 + 3y$.

$y^2 + 3y + 2 = 0$

$y_1 = -2$; $y_2 = -1$.

Ответ: $\{-2; -1\}$.

5.18. Решите неравенство: $\int_{-2}^4 (x+3)\,dx \ge y^2 + 8$.

Решение:

Вычислим интеграл:

$$\int_{-2}^4 (x+3)\,dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x\right)\Big|_{-2}^4 = (8+12) - (2-6) = 24.$$

Решим полученное неравенство: $24 \ge y^2 + 8$.

$y^2 - 16 \le 0$

$(y-4)(y+4) \le 0$

$y \in [-4; 4]$

Ответ: $[-4; 4]$.

5.19. При каких значениях a выполняется равенство:

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{1-2x}{3}\,dx = -\frac{4}{3}.$$

Решение:

Вычислим интеграл:

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{1-2x}{3}\,dx = \frac{1}{3}\left(x-x^2\right)\Big|_{\frac{a}{2}}^{a} = \frac{1}{3}\left(a-a^2\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}\right) = \frac{2a-3a^2}{12}$$

Решим уравнение:

$$\frac{2a-3a^2}{12} = -\frac{4}{3}$$

$$3a^2-2a-16=0$$

$$a_1=-2\,,\quad a_2=\frac{8}{3}$$

Ответ: $a=-2$ или $a=2\frac{2}{3}$.

5.20. Решите неравенство: $\sqrt{x^2-x-12}-\int\limits_0^x dz < x\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx$.

Решение:

$$\int_0^x dz = z\Big|_0^x = x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0) = 0$$

Получаем неравенство:

$$\sqrt{x^2-x-12}-x<0$$

$$\sqrt{x^2-x-12}<x$$

Последнее неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x>0, \\ x^2-x-12\ge 0, \\ x^2-x-12<x^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0, \\ (x-4)(x+3)\ge 0, \\ x>-12; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0, \\ (x-4)(x+3)\ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -3, \\ x \ge 4; \end{array}\right. \end{cases} \qquad x \ge 4.$$

Ответ: $x \in [4; \infty)$.

5.21. Найдите все числа $b > 1$, для которых $\int\limits_1^b (b-4x)\,dx \ge 6-5b$.

Решение:

$$\int\limits_1^b (b-4x)\,dx = \left(bx-2x^2\right)\Big|_1^b = \left(b^2-2b^2\right)-(b-2) = -b^2-b+2$$

Получаем неравенство: $-b^2-b+2 \ge 6-5b$.

$b^2-4b+4 \le 0$; $\quad (b-2)^2 \le 0$; $\quad b=2$.

Ответ: $b=2$.

5.22. Найдите все числа A и B, при которых функция вида $f(x) = A\cdot\sin\pi x + B$ удовлетворяет условиям:

$$f'(1) = 2, \qquad \int\limits_0^2 f(x)\,dx = 4.$$

Решение:

Найдем производную функции $f(x)$: $\quad f'(x) = A\cdot\pi\cdot\cos\pi x$.

По условию $f'(1) = 2$, следовательно:

$$A\cdot\pi\cdot\cos\pi = 2; \qquad -A\cdot\pi = 2; \qquad A = -\frac{2}{\pi}.$$

Вычислим интеграл:

$$\int\limits_0^2 (A\cdot\sin\pi x + B)dx = \int\limits_0^2 \left(-\frac{2}{\pi}\sin\pi x + B\right)dx =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\cos\pi x + Bx\right)\Big|_0^2 = \left(\frac{2}{\pi^2}\cdot\cos 2\pi + 2B\right) - \left(\frac{2}{\pi^2}\cdot\cos 0 - 0\right) = 2B$$

Получаем: $2B = 4$; $B = 2$.

Ответ: $A = -\dfrac{2}{\pi}$, $B = 2$.

5.23. При каких значениях параметра a значение интеграла $\int\limits_0^a (1-2x)\,dx$ максимально?

Решение:

Вычислим интеграл:

$$\int\limits_0^a (1-2x)\,dx = \left(x - x^2\right)\Big|_0^a = a - a^2 = -a^2 + a - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.$$

Значение интеграла максимально, когда $\left(a - \dfrac{1}{2}\right) = 0$, то есть $a = \dfrac{1}{2}$

Ответ: $a = \dfrac{1}{2}$.

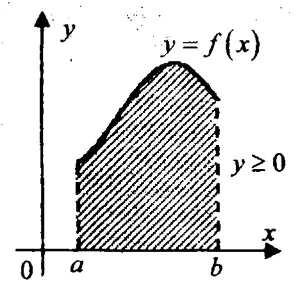
Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла

Используя понятие определенного интеграла, рассмотрим общий метод вычисления площадей плоских фигур.

Определение 3. Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная неотрицательная функция $y=f(x)$. Фигура, ограниченная графиком этой функции и прямыми $y=0$, $x=a$, $x=b$, называется ***криволинейной трапецией***.

1. Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле:

$$S_\Phi=\int_a^b f(x)\,dx$$



5.24. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=x^2+1$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$

2) $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$

3) $y=\dfrac{1}{(x+1)^2}$, $y=0$, $x=1$, $x=2$

4) $y=\cos^2 x-\sin^2 x$, $y=0$, $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$

5) $y=-3x^2+6x$ и $y=0$

6) $y=(x-3)^2$, $y=0$, $x=6$

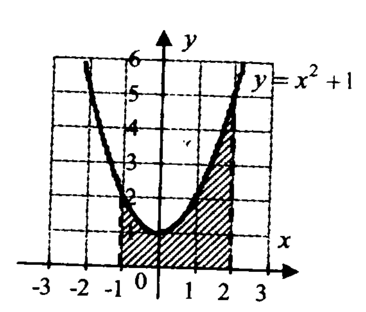
Решение:

1) $y=x^2+1$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$

Фигура ограничена графиком функции $y=x^2+1$ и осью абсцисс. Пределы интегрирования: $x=-1$, $x=2$. Тогда искомая площадь:

$$S_Ф = \int_{-1}^{2}\left(x^2+1\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$=\left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(-\frac{1}{3}-1\right)=3+3=6$$

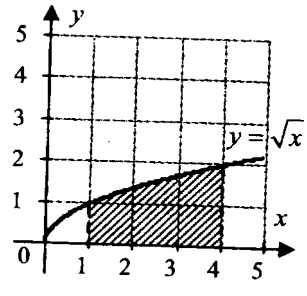


Ответ: 6.

2) $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$

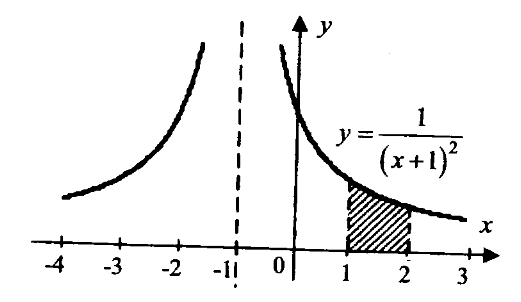
$$S_Ф = \int_{1}^{4}\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{1}^{4} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Bigg|_{1}^{4} =$$

$$=\frac{2}{3}(8-1)-=\frac{14}{3}$$



Ответ: $\frac{14}{3}$.

3) $y=\frac{1}{(x+1)^2}$, $y=0$, $x=1$, $x=2$

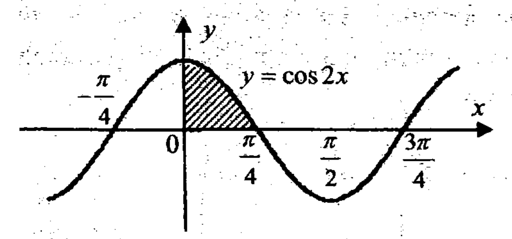


$$S_Ф = \int_{1}^{2}\frac{dx}{(x+1)^2} = \int_{1}^{2}(x+1)^{-2}\,dx = -\frac{1}{x+1}\Bigg|_{1}^{2} = -\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

4) $y=\cos^2 x-\sin^2 x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$

$y=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$



$$S_\Phi=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}-0=\frac{1}{2}$$

Ответ: 0,5.

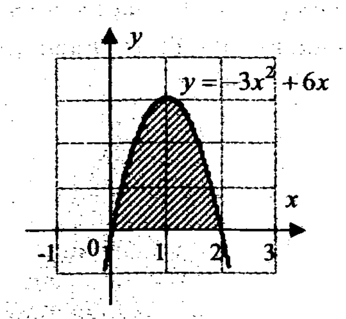
5) $y=-3x^2+6x$ и $y=0$

В данном задании не указаны пределы интегрирования. Для того чтобы их определить, необходимо найти точки пересечения графиков заданных функций.

Найдем абсциссы точек пересечения параболы $y=-3x^2+6x$ и прямой $y=0$ (оси Ox). Для этого решим уравнение:

$-3x^2+6x=0$

$x_1=0$, $x_2=2$



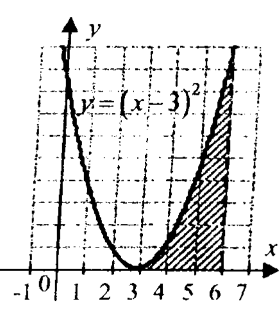
$$S_\Phi=\int_0^2\left(-3x^2+6x\right)dx=\left(-x^3+3x^2\right)\Big|_0^2=\left(-8+12\right)-0=4$$

Ответ: 4.

6) $y=(x-3)^2$, $y=0$, $x=6$

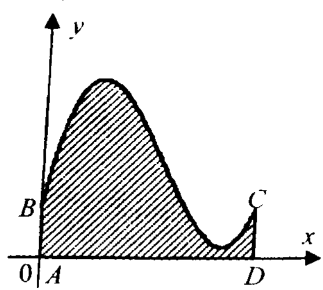
В данном задании указан только один предел интегрирования $x=6$. Для того чтобы найти второй предел интегрирования сделаем эски графиков заданных функций. Из графика видно, что парабола $y=(x-3)^2$ касается оси абсцисс в точке $x=3$, это и будет нижний предел интегрирования.

$$S_{\Phi}=\int_3^6 (x-3)^2\,dx=\frac{(x-3)^3}{3}\bigg|_3^6=\frac{27}{3}=9$$



Ответ: 9

5.25. Фермерскому хозяйству необходимо засеять поле, имеющее форму криволинейной трапеции, изображенной на рисунке. Вдоль границы BC протекает река, причем граница BC задается уравнением $y=x^3-5x^2+6x+0,8$. Вдоль другой границы AD проходит прямолинейный участок дороги длиной 3 км. Сколько килограммов семян потребуется, если для хорошего урожая на 1 м^2 нужно внести 0,001 кг семян?



Решение:

Площадь поля определим, используя определенный интеграл.

По условию задачи прямую AD можно принять за ось Ox с началом координат в точке …

Так как $AD = 3$ км, площадь поля есть:

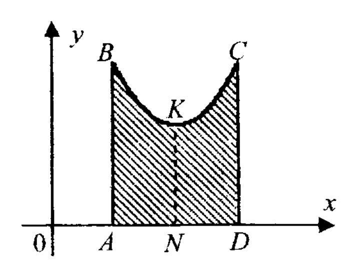
$$S_\Phi = \int_0^3 \left(x^3 - 5x^2 + 6x + 0,8\right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 3x^2 + 0,8x\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \left(\frac{81}{4} - 45 + 27 + 2,4\right) - 0 = 4,65 \text{ км}^2.$$

Если на 1 м^2 нужно внести 0,001 кг семян, то на 1 км^2 расходуется $0,001 \cdot 10^6 = 1\,000$ кг семян. Тогда на все поле площадью 4,65 км^2 уйдет $4,65 \cdot 1\,000 = 4\,650$ кг.

Ответ: 4 650 кг.

5.26. Руководство предприятия приняло решение о покупке участка на побережье для строительства дома отдыха сотрудников. Участок имеет форму криволинейной трапеции, изображенной на рисунке. Известно, что граница BC участка – линия морского пляжа, которую можно задать уравнением параболы $y = 20x^2 - 8x + 1,1$, а длина границы AD равна 0.2 км. Абсциссы вершины параболы K и середины нижнего основания N совпадают. Определите, на какую максимальную численность отдыхающих можно построить дом отдыха, если по санитарным нормам на 1 км^2 побережья должно приходиться не более 3 000 человек.



Решение:

Абсцисса вершины параболы: $x_K = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{8}{40} = 0,2$.

По условию абсциссы точек K и N совпадают, значит, $x_N = 0,2$.

Тогда, зная, что длина $AD = 0,2$ и N - середина AD, можно определить пределы интегрирования:

$AN = ND = 0,1$;

$x_A = 0,2 - 0,1 = 0,1$;

$x_B = 0,2 + 0,1 = 0,3$.

Найдем площадь участка:

$$S_\Phi = \int_{0,1}^{0,3} \left(20x^2 - 8x + 1,1\right) dx = \left(\frac{20x^3}{3} - 4x^2 + 1,1x\right)\Bigg|_{0,1}^{0,3} =$$

$$= \left(0,18 - 0,36 + 0,33\right) - \left(\frac{0,02}{3} - 0,04 + 0,11\right) = 0,15 - 0,07 - \frac{2}{300} =$$

$$= \frac{2}{25} - \frac{1}{150} = \frac{11}{150} \text{ км}^2.$$

Предельно возможная по санитарным нормам численность отдыхающих:

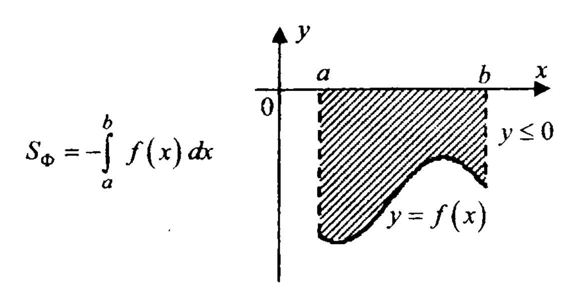
$$\frac{11}{150} \cdot 3\,000 = 220 \text{ человек.}$$

Ответ: 220 человек.

2. Рассмотрим случай, когда $y = f(x)$ - **неположительная** непрерывная функция на отрезке $[a;b]$.

Тогда график функции расположен ниже оси Ox.

Для вычисления площади данной криволинейной трапеции следует использовать формулу:



5.27. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=-x^2+4x-4$, $y=0$, $x=-1$, $x=4$

2) $y=\sqrt[3]{x}$, $y=0$, $x=-1$

3) $y=-\sqrt{2-x}$, $y=0$, $x=-7$

Решение:

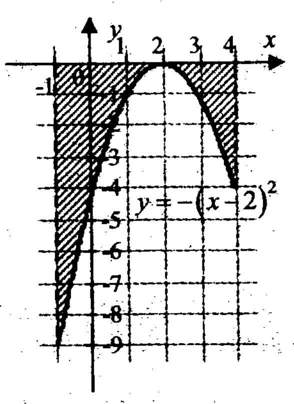
1) $y=-x^2+4x-4$, $y=0$, $x=-1$, $x=4$

$$y=-x^2+4x-4=-(x-2)^2$$

Функция $y=-(x-2)^2$ не принимает положительные значения на интервале $[-1;4]$, поэтому искомая площадь:

$$S_{\Phi}=-\int_{-1}^{4}-(x-2)^2\,dx=\int_{-1}^{4}(x-2)^2\,dx=$$

$$=\frac{(x-2)^3}{3}\Bigg|_{-1}^{4}=\frac{8}{3}+9=11\frac{2}{3}$$

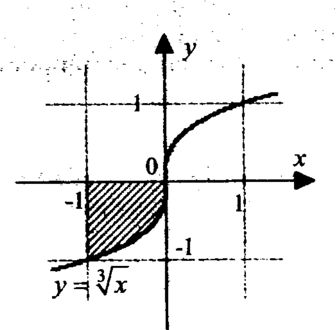


Ответ: $11\frac{2}{3}$.

2) $y=\sqrt[3]{x}$, $y=0$, $x=-1$

$$S_{\Phi}=-\int_{-1}^{0}\sqrt[3]{x}\,dx=-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Bigg|_{-1}^{0}=$$

$$=-\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\Bigg|_{-1}^{0}=0+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

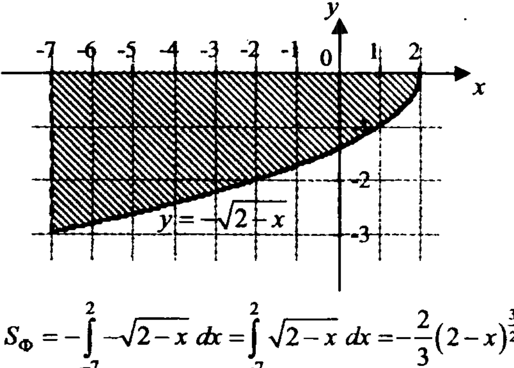


Ответ: $\frac{3}{4}$.

3) $y=-\sqrt{2-x}$, $y=0$, $x=-7$

Область определения функции $y=-\sqrt{2-x}$: $2-x\geq 0$; $x\leq 2$.

Следовательно, $x=-7$ является нижним пределом интегрирования, а верхним пределом интегрирования будет $x=2$.



$$S_{\Phi}=-\int_{-7}^{2}-\sqrt{2-x}\,dx=\int_{-7}^{2}\sqrt{2-x}\,dx=-\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-7}^{2}=$$

$$=-\frac{2}{3}(2-x)\sqrt{2-x}\Big|_{-7}^{2}=0+\frac{2}{3}\cdot 27=18$$

Ответ: 18.

3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на этом **отрезке как положительные, так и отрицательные** значения.

В этом случае отрезок $[a;b]$ разбивается на несколько частей, в каждой из которых функция сохраняет знак, затем вычисляются площади полученных частей согласно вышеприведенным формулам, в конце полученные результаты складываются.

$$S_{\Phi}=-\int_{a}^{c}f(x)\,dx+\int_{c}^{b}f(x)\,dx$$

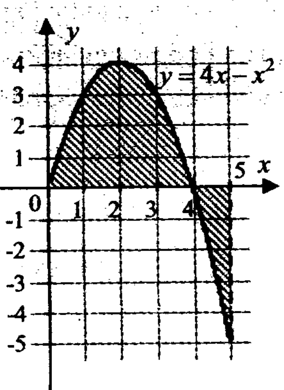
5.28. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = 4x - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$

2) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{5\pi}{6}$, $x = \pi$

Решение:

1) $y = 4x - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$



$$S_\Phi = \int_0^4 \left(4x - x^2\right) dx - \int_4^5 \left(4x - x^2\right) dx =$$

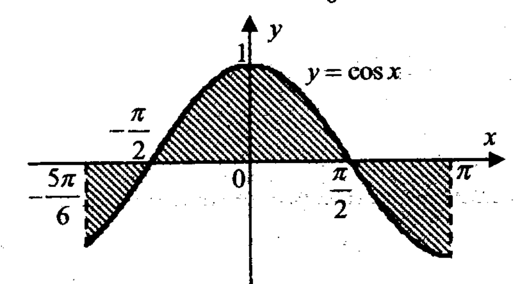
$$= \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 - \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_4^5 =$$

$$= \left(32 - \frac{64}{3}\right) - \left(50 - \frac{125}{3} - 32 + \frac{64}{3}\right) =$$

$$= 14 - \frac{3}{3} = 13$$

Ответ: 13.

2) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{5\pi}{6}$, $x = \pi$



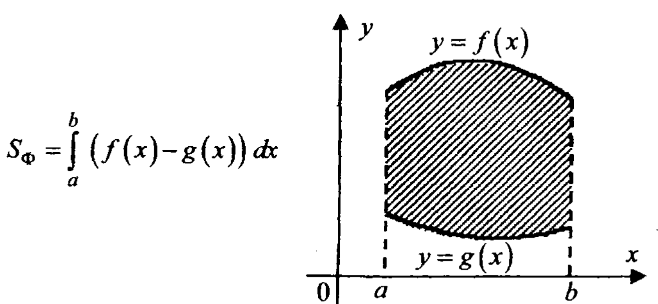
$$S_\Phi = -\int_{-\frac{5\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\, dx =$$

$$= -\sin x\Big|_{-\frac{5\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{2}} + \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+(1+1)-(0-1)=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

Ответ: 3,5.

4. Площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций $f(x)$ и $g(x)$, непрерывных на отрезке $[a;b]$ и таких, что $f(x)\ge g(x)$ для всех $x\in[a;b]$, а также двумя прямыми $x=a$ и $x=b$, вычисляется по формуле:

$$S_{\Phi}=\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,dx$$



Замечание. Если известно, что график одной из функций $f(x)$ или $g(x)$ лежит выше другого, то можно не выяснять, какой именно, а воспользоваться формулой:

$$S_{\Phi}=\left|\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,dx\right|.$$

5.29. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=5-x^2$, $y=1$ **2)** $y=4-x^2$, $y=2x-x^2$, $x=0$

3) $y=x+3$, $y=x^2+1$ **4)** $y=\sqrt{2x}$, $y=\frac{x^2}{2}$

5) $y=\frac{1}{x}$, $y=x$, $x=2$ **6)** $y=\frac{9}{x^2}$, $y=-x-2$, $x=-2$

7) $y=x^3-3x$, $y=x$ **8)** $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$

9) $y=\sin x$, $y=x^2-\pi x$ **10)** $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=1$

11) $y=\dfrac{8}{4+x^2}$, $y=\dfrac{x^2}{4}$ **12)** $y=-2+|x|$, $y=-x^2$

Решение:

1) $y=5-x^2$, $y=1$

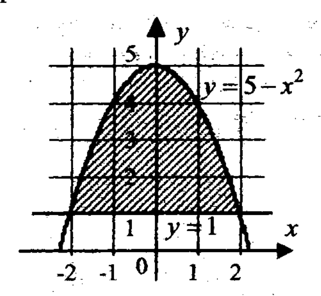
Для определения пределов интегрирования найдём точки пересечения графиков функций $y=5-x^2$ и $y=1$. Т.е. приравняем правые части данных функций и решим полученное уравнение.

$5-x^2=1$

$x^2=4$

$x_1=-2$, $x_2=2$

Построим эскиз графиков.



В интервале интегрирования $[-2;2]$ график параболы $y=5-x^2$ лежит выше прямой $y=1$, следовательно, площадь фигуры вычисляется как следующий определенный интеграл:

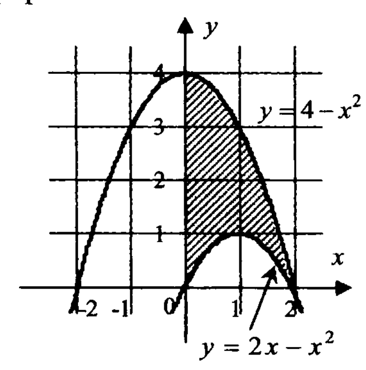
$$S_\Phi=\int_{-2}^{2}\left(5-x^2-1\right)dx=\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=$$

$$=\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right)=\frac{32}{3}$$

Ответ: $10\frac{2}{3}$.

2) $y=4-x^2$, $y=2x-x^2$, $x=0$

Построим эскиз графиков.



Точки пересечения графиков функций $y=4-x^2$, $y=2x-x^2$:

$4-x^2=2x-x^2$; $\quad x=2$.

Таким образом, $x=0$ - нижний предел интегрирования, $x=2$ - верхний предел интегрирования, площадь фигуры равна:

$$S_\Phi=\int_0^2\left(\left(4-x^2\right)-\left(2x-x^2\right)\right)dx=\int_0^2(4-2x)\,dx=\left(4x-x^2\right)\Big|_0^2=$$

$=8-4=4$

Ответ: 4.

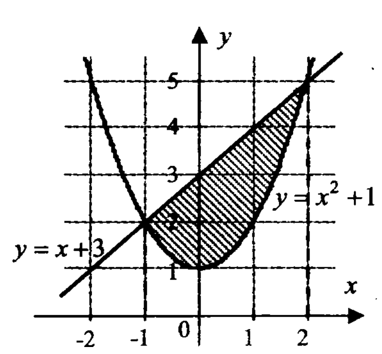
3) $y=x+3$, $y=x^2+1$

Найдем точки пересечения графиков функций $y=x+3$ и $y=x^2+1$.

$x+3=x^2+1$

$x^2-x-2=0$

$x_1=-1$, $\quad x_2=2$



На отрезке $[-1;2]$ график функции $y=x+3$ расположен выше параболы $y=x^2+1$, поэтому площадь вычисляется по формуле:

$$S_{\Phi}=\int_{-1}^{2}\left(x+3-\left(x^2+1\right)\right)dx=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+x+2\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=$$

$$=\left(-\frac{8}{3}+6\right)-\left(\frac{1}{3}-1,5\right)=4,5.$$

Ответ: 4,5.

4) $y=\sqrt{2x}$, $y=\dfrac{x^2}{2}$

Область определения функции $y=\sqrt{2x}$: $x\in[0;\infty)$.

Найдем точки пересечения функций и построим эскиз графиков.

$$\sqrt{2x}=\frac{x^2}{2}$$

$$2x=\frac{x^4}{4}$$

$$2x\left(1-\frac{x^3}{8}\right)=0$$

$$x_1=0,\quad x_2=2$$

На отрезке $[0;2]$ выполнено неравенство: $\dfrac{x^2}{2}\le\sqrt{2x}$, следовательно, площадь фигуры равна:

$$S_{\Phi}=\int_{0}^{2}\left(\sqrt{2x}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\int_{0}^{2}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\left(\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{0}^{2}=$$

$$=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot2\sqrt{2}-\frac{8}{6}\right)-0=\frac{8}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}.$$

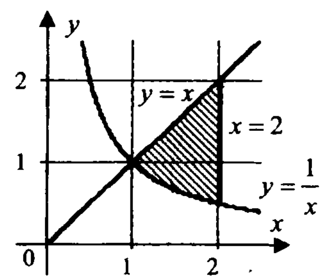
Ответ: $\dfrac{4}{3}$.

5) $y=\frac{1}{x}$, $y=x$, $x=2$

$x=2$ - один из пределов интегрирования.

График гиперболы $y=\frac{1}{x}$ пересекается с прямой $y=x$ в точках с абсциссами $x=1$ и $x=-1$.

Тогда интервалом интегрирования является отрезок $[1;2]$.



На отрезке $[1;2]$ график функции $y=x$ расположен выше графика функции $y=\frac{1}{x}$, поэтому площадь фигуры равна:

$$S_\Phi=\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\ln|x|\right)\Bigg|_1^2=(2-\ln 2)-\left(\frac{1}{2}-\ln 1\right)=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

Ответ: $\frac{3}{2}-\ln 2$.

6) $y=\frac{9}{x^2}$, $y=-x-2$, $x=-2$

Найдем точки пересечения функций $y=\frac{9}{x^2}$ и $y=-x-2$ и построим эскиз графиков.

$$-x-2=\frac{9}{x^2}$$

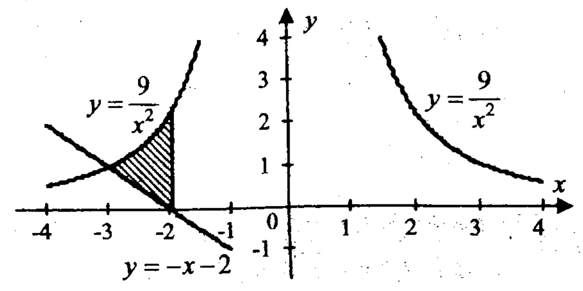
$$x^3+2x^2+9=0$$

$$x^3+3x^2-x^2+9=0$$

$x^2(x+3)-(x+3)(x-3)=0$

$(x+3)\underbrace{(x^2-x+3)}_{D<0}=0$

$x=-3$



На отрезке $[-3;-2]$ $\quad \frac{9}{x^2}\geq-(x+2)$.

$$S_\Phi=\int_{-3}^{-2}\left(\frac{9}{x^2}+x+2\right)dx=\left(-\frac{9}{x}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-3}^{-2}=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1$$

Ответ: 1.

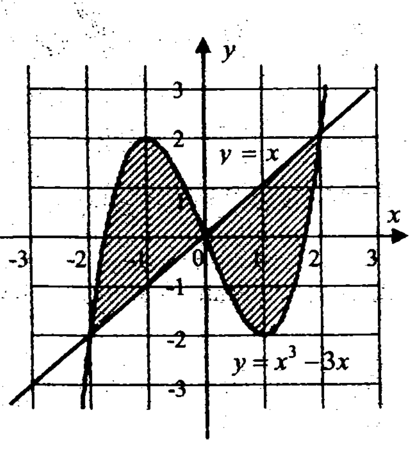
7) $y=x^3-3x$, $y=x$

Точки пересечения:

$x^3-3x=x$

$x(x^2-4)=0$

$x_1=0$, $x_2=-2$, $x_3=2$



Функции $y=x^3-3x$ и $y=x$ нечетные, следовательно, их графики являются центрально-симметричными относительно начала координат.

Поэтому фигура, ограниченная графиками этих функций, так же симметрична относительно начала координат, то есть состоит из двух равных по площади симметричных друг другу частей.

В этом случае достаточно вычислить площадь одной из этих частей, а затем удвоить полученный результат.

$$S_\Phi = 2\int_0^2 \left(x-\left(x^3-3x\right)\right)dx = 2\int_0^2 \left(4x-x^3\right)dx = 2\cdot\left(2x^2-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$=2\cdot(8-4)=8.$$

Ответ: 8.

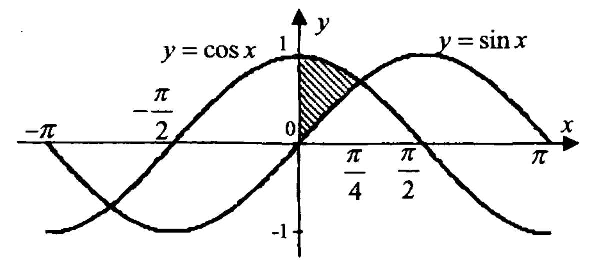
8) $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$

Точки пересечения графиков $y=\sin x$ и $y=\cos x$:

$\sin x = \cos x \quad \Big| : \cos x \neq 0$

$tgx = 1$

$x=\frac{\pi}{4}+\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}$



Интервал интегрирования $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$. Тогда площадь фигуры:

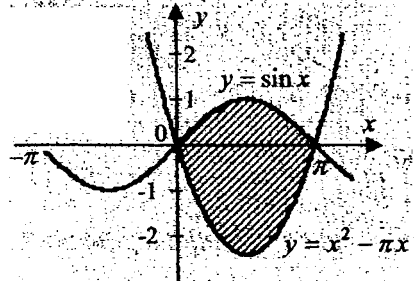
$$S_\Phi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx = (\sin x + \cos x)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$=\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)-(\sin 0+\cos 0)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1=\sqrt{2}-1$$

Ответ: $\sqrt{2}-1$.

9) $y=\sin x$, $y=x^2-\pi x$

Заметим, что $x=0$ и $x=\pi$ есть нули функции $y=x^2-\pi x$ и функции $y=\sin x$. Общие нули функций являются точками пересечения графиков данных функций и, как следствие, пределами интегрирования при вычислении площади криволинейной трапеции.



$$S_\Phi=\int_0^\pi\left(\sin x-x^2+\pi x\right)dx=\left(-\cos x-\frac{x^3}{3}+\frac{\pi x^2}{2}\right)\Bigg|_0^\pi=$$

$$=\left(1-\frac{\pi^3}{3}+\frac{\pi^3}{2}\right)-(-1)=2+\frac{\pi^3}{6}$$

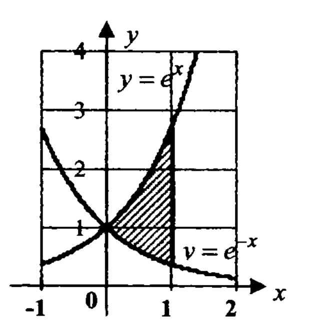
Ответ: $2+\dfrac{\pi^3}{6}$.

10) $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=1$

Графики функций $y=e^x$ и $y=e^{-x}$ пересекаются в точке с абсциссой $x=0$.

$$S_{\Phi}=\int_0^1\left(e^x-e^{-x}\right)dx=$$

$$=\left(e^x+e^{-x}\right)\Big|_0^1=e+\frac{1}{e}-2$$



Ответ: $e+\frac{1}{e}-2$.

11) $y=\frac{8}{4+x^2}$, $y=\frac{x^2}{4}$

Найдем точки пересечения и построим эскиз графиков.

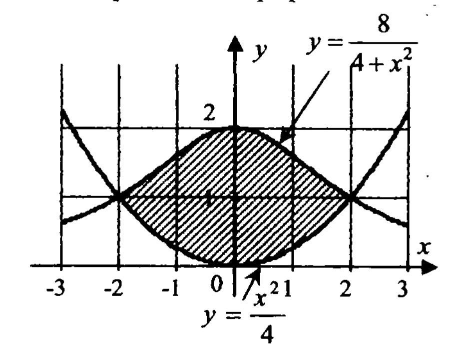
$$\frac{8}{4+x^2}=\frac{x^2}{4}$$

$$x^4+4x^2-32=0$$

$$\left(x^2-4\right)\left(x^2+8\right)=0$$

$$x^2-4=0$$

$$x_{1,2}=\pm 2$$



$$S_{\Phi}=\int_{-2}^{2}\left(\frac{8}{x^2+4}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left(8\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=$$

$$=\left(4\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right)-\left(4\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{2}{3}\right)=2\pi-\frac{4}{3}$$

Ответ: $2\pi-\frac{4}{3}$.

12) $y=-2+|x|$, $y=-x^2$

Функции $y=-2+|x|$ и $y=-x^2$ являются четными, следовательно, графики данных функций симметричны относительно оси Oy.

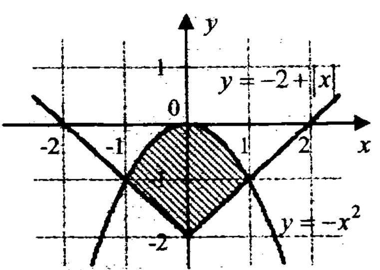
Найдем точки пересечения графиков этих функций при $x \ge 0$.

$-2+x=-x^2 \quad (x \ge 0)$

$x^2+x-2=0$

$x_1=-2$ - посторонний корень,

$x_2=1$



В силу симметричности абсцисса второй точки пересечения будет $x=-1$. Тогда площадь фигуры:

$$S_\Phi=\int_{-1}^{1}\left(-x^2-\left(-2+|x|\right)\right)dx.$$

Фигура, ограниченная графиками данных функций, симметричных относительно оси Oy, состоит из двух равных по площади симметричных друг другу частей. Поэтому достаточно вычислить площадь одной ее части, например при $x \ge 0$ в пределах от 0 до 1, а затем удвоить полученный результат.

$$S_\Phi=2\cdot\int_0^1\left(-x^2-\left(-2+x\right)\right)dx=2\cdot\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_0^1=$$

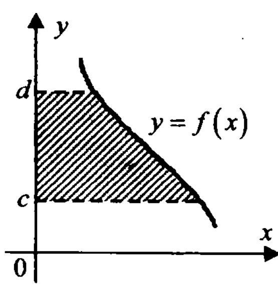
$$=2\cdot\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)=2\cdot\frac{7}{6}=\frac{7}{3}$$

Ответ: $\frac{7}{3}$.

5. Если фигура ограничена прямыми $y=c$, $y=d$ $(c<d)$, осью Oy и графиком непрерывно возрастающей (убывающей) функции $y=f(x)$ $(x \ge 0)$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S_{\Phi} = \int_{c}^{d} \varphi(x)\,dx,$$

где $\varphi(x)$ - функция, обратная к $f(x)$



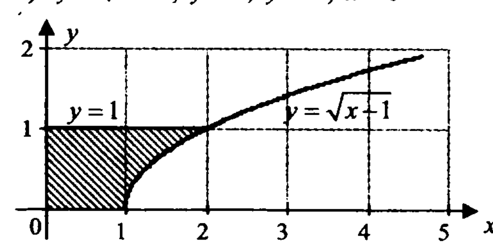
5.30. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=\sqrt{x-1}$, $y=1$, $y=0$, $x=0$

2) $y=\dfrac{1}{x^2}$, $y=1$, $y=4$, $x \geq 0$

Решение:

1) $y=\sqrt{x-1}$, $y=1$, $y=0$, $x=0$



Найдем функцию, обратную к функции $y=\sqrt{x-1}$.

$x=\sqrt{y-1}$

$x^2=y-1$

$y=x^2+1 \quad (x \geq 0)$ - функция, обратная к функции $y=\sqrt{x-1}$.

$$S_{\Phi} = \int_0^1 \left(x^2+1\right) dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{1}{3}+1\right)-0=\frac{4}{3}$$

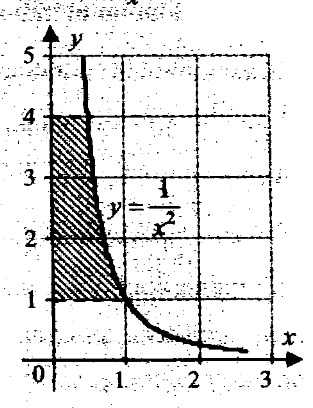
Ответ: $\dfrac{4}{3}$.

2) $y=\dfrac{1}{x^2}$, $y=1$, $y=4$, $x \geq 0$

Найдем функцию, обратную к функции $y = \frac{1}{x^2}$:

$$x = \frac{1}{y^2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x > 0)$$



Площадь фигуры:

$$S_\Phi = \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\,\Big|_1^4 =$$

$$= 4 - 2 = 2$$

Ответ: 2.

6. Если требуется вычислить площадь более сложной фигуры, то стараются представить искомую площадь в виде алгебраической суммы площадей криволинейных трапеций.

5.31. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y=x^2$, $y=\frac{1}{x^2}$ $(x\geq 0)$, $y=0$, $x=5$.

Решение:

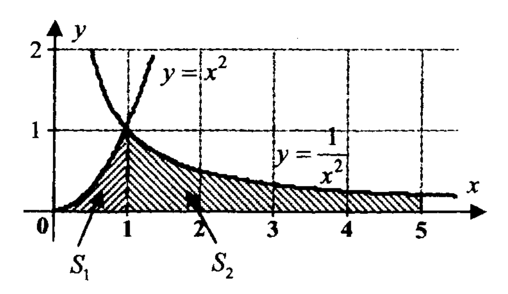
Сделаем эскиз графиков. Функции $y=x^2$ и $y=\frac{1}{x^2}$ при условии, что $x\geq 0$, пересекаются в точке с абсциссой $x=1$.

Из эскиза графиков следует, что отрезок интегрирования $[0;5]$ необходимо разбить на два $[0;1]$ и $[1;5]$

$S_\Phi = S_1 + S_2$

$S_1=\int_0^1 x^2\,dx$

$S_2=\int_1^5 \frac{dx}{x^2}$



$$S_\Phi=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^5 \frac{dx}{x^2}=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1-\frac{1}{x}\Big|_1^5=\left(\frac{1}{3}-0\right)-\left(\frac{1}{5}-1\right)=\frac{17}{15}$$

Ответ: $\frac{17}{15}$.

5.32. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y=\sqrt{x}$, $y=|x-2|$.

Решение:

Построим эскиз графиков функций.

$$y=|x-2|=\begin{cases}x-2, & x\geq 2,\\ 2-x, & x<2.\end{cases}$$

Область определения функции $y=\sqrt{x}$: $[0;\infty)$.

Найдем точки пересечения графиков функций.

$$\sqrt{x}=|x-2| \quad |(\ )^2$$

$$x=x^2-4x+4$$

$$x^2-5x+4=0$$

$$x_1=1, \quad x_2=4$$

Обе точки принадлежат области определения функций.

Графики функций пересекаются в точках $B(1;1)$ и $C(4;2)$.

Площадь фигуры можно найти как площадь криволинейной трапеции $ABCD$ за минусом площади двух прямоугольных треугольников ABE и ECD.

$$S_{ABCD}=\int_1^4\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_1^4=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$$

Катеты прямоугольного треугольника ABE равны 1, следовательно, его площадь: $S_{\Delta ABE}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=0,5$.

Катеты прямоугольного треугольника ECD равны 2, следовательно, его площадь: $S_{\Delta ECD}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$.

$$S_{\Phi}=S_{ABCD}-S_{\Delta ABE}-S_{\Delta ECD}=\frac{14}{3}-\frac{1}{2}-2=\frac{13}{6}$$

Ответ: $\frac{13}{6}$.

5.33. Вычислите площадь криволинейного треугольника, расположенного в первой четверти и ограниченного следующими линиями:

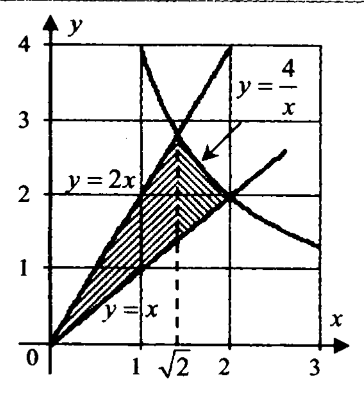
$xy=4$, $y=x$, $y=2x$.

Решение:

Графиком функции $xy = 4$ является гипербола $y = \frac{4}{x}$.

Найдем абсциссы точек пересечения функций:

$y = 2x$ и $y = \frac{4}{x}$	$y = x$ и $y = \frac{4}{x}$
$2x = \frac{4}{x} \quad (x > 0)$ $x^2 = 2$ $x = \sqrt{2}$	$x = \frac{4}{x} \quad (x > 0)$ $x^2 = 4$ $x = 2$



Фигура состоит из двух частей. Ее площадь равна:

$$S_Ф = \int\limits_0^{\sqrt{2}} (2x - x)\,dx + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \left(\frac{4}{x} - x\right) dx = \int\limits_0^{\sqrt{2}} x\,dx + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \left(\frac{4}{x} - x\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{2}} + \left(4\ln|x| - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2} = 1 + \left(4\ln 2 - 2 - 4\ln\sqrt{2} + 1\right) =$$

$$= 1 + (2\ln 2 - 1) = 2\ln 2$$

Ответ: $2\ln 2$.

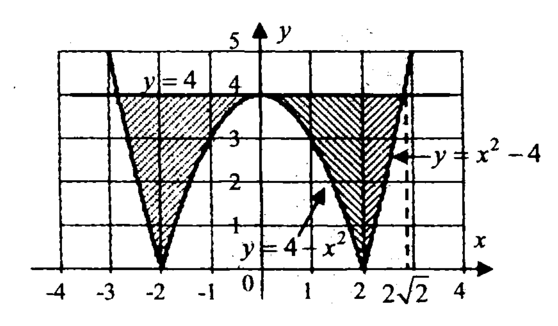
5.34. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:
$y=\left|x^2-4\right|$, $y=4$

Решение:

$$y=\left|x^2-4\right|=\begin{cases}x^2-4, & x\in(-\infty;-2]\cup[2;\infty);\\ 4-x^2, & x\in(-2;2).\end{cases}$$

Точки пересечения функций $y=\left|x^2-4\right|$ и $y=4$ найдем, решив следующее уравнение с модулем.

$$\left|x^2-4\right|=4;\quad \left[\begin{array}{l}x^2-4=4,\\ x^2-4=-4;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x^2=8,\\ x^2=0;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=\pm 2\sqrt{2},\\ x=0.\end{array}\right.$$



Фигура состоит из двух симметричных относительно оси Oy частей. Поэтому достаточно найти площадь S' той ее части, которая расположена в первой четверти, а затем полученный результат удвоить.

$$S'=\int_0^2\left(4-\left(4-x^2\right)\right)dx+\int_2^{2\sqrt{2}}\left(4-\left(x^2-4\right)\right)dx=$$

$$=\int_0^2 x^2\,dx+\int_2^{2\sqrt{2}}\left(8-x^2\right)dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2+\left(8x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^{2\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{8}{3}+\left(16\sqrt{2}-\frac{16\sqrt{2}}{3}-16+\frac{8}{3}\right)=\frac{32\sqrt{2}}{3}-\frac{32}{3}=\frac{32}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$S_{\Phi}=2S'=\frac{64}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$ Ответ: $\frac{64}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

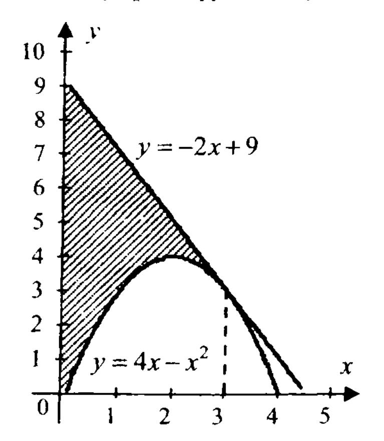
5.35. Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямой $x = 0$, графиком функции $y = 4x - x^2$ и касательной к этому графику в точке с абсциссой $x = 3$.

Решение:

Найдем уравнение касательной к графику функции $y = 4x - x^2$ в точке с абсциссой $x = 3$.

$$\left.\begin{aligned} y' &= 4 - 2x \\ y'(3) &= -2 \\ y(3) &= 3 \end{aligned}\right| \quad y = -2(x-3) + 3 = -2x + 9$$

Схематично изобразим графики функций $y = 4x - x^2$ и $y = -2x + 9$.



$$S_\Phi = \int_0^3 \left(-2x + 9 - 4x + x^2\right) dx = \int_0^3 \left(x^2 - 6x + 9\right) dx = \int_0^3 (x-3)^2\, dx =$$

$$= \left.\frac{(x-3)^3}{3}\right|_0^3 = 9$$

Ответ: 9.

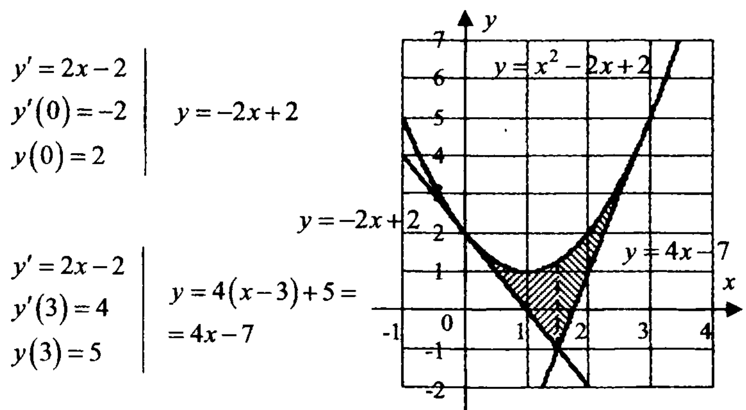
5.36. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - 2x + 2$ и касательными, проведенными к этому графику в точках с абсциссами $x = 0$ и $x = 3$.

Решение:

Найдем уравнения касательных к графику функции $y = x^2 - 2x + 2$ в точках с абсциссами $x = 0$ и $x = 3$.

$$\left.\begin{aligned} &y' = 2x - 2 \\ &y'(0) = -2 \\ &y(0) = 2 \end{aligned}\right| \quad y = -2x + 2$$

$$\left.\begin{aligned} &y' = 2x - 2 \\ &y'(3) = 4 \\ &y(3) = 5 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} &y = 4(x-3) + 5 = \\ &= 4x - 7 \end{aligned}$$



Найдем точку пересечения касательных:

$-2x + 2 = 4x - 7$; $\quad x = \dfrac{3}{2}$.

Прямой $x = \dfrac{3}{2}$ фигура разбивается на две части. Тогда ее площадь вычисляется по формуле:

$$S_\Phi = \int_0^{\frac{3}{2}} \left(x^2 - 2x + 2 - (-2x + 2)\right) dx + \int_{\frac{3}{2}}^{3} \left(x^2 - 2x + 2 - (4x - 7)\right) dx =$$

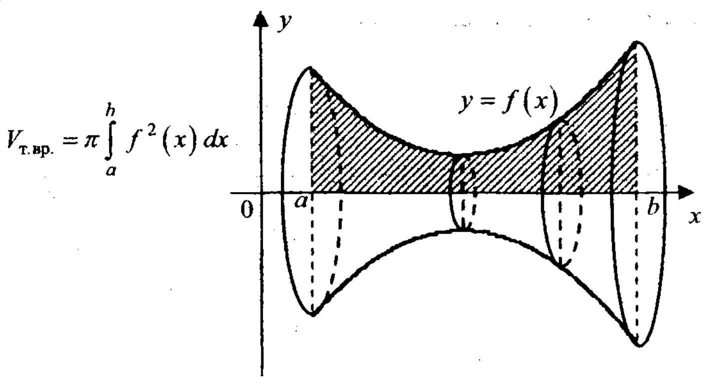
$$= \int_0^{\frac{3}{2}} x^2\, dx + \int_{\frac{3}{2}}^{3} \left(x^2 - 6x + 9\right) dx = \int_0^{\frac{3}{2}} x^2\, dx + \int_{\frac{3}{2}}^{3} (x-3)^2\, dx =$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\frac{3}{2}} + \left.\frac{(x-3)^3}{3}\right|_{\frac{3}{2}}^{3} = \frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}.$$

Ответ: 2,25.

Объем V тела, полученного в результате вращения криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, $x = a$, $x = b$ $(b > a)$ вокруг оси Ox, вычисляется по формуле:

$$V_{\text{т.вр.}} = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$



5.37. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

$y = \sqrt{x+1}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

Решение:

Воспользуемся формулой объема тела вращения:

$$V_{\text{т.вр.}} = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x+1}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 (x+1)\,dx =$$

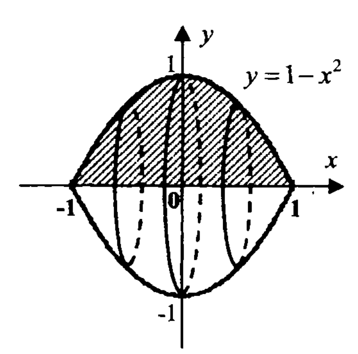
$$= \pi \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Bigg|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3\pi}{2}$$

Ответ: $\dfrac{3\pi}{2}$.

5.38. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 1 - x^2$, $y = 0$.

Решение:

Парабола $y = 1 - x^2$ пересекает ось Ox в точках $x = -1$ и $x = 1$.



С учетом того, что на интервале $[-1; 1]$ функция $y = 1 - x^2$ четная, объем тела вращения равен:

$$V_{\text{т.вр.}} = \pi \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 dx = 2\pi \int_{0}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 dx = 2\pi \int_{0}^{1} \left(1 - 2x^2 + x^4\right) dx =$$

$$= 2\pi \cdot \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right)\Bigg|_0^1 = 2\pi \cdot \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{16\pi}{15}.$$

Ответ: $\dfrac{16\pi}{15}$.

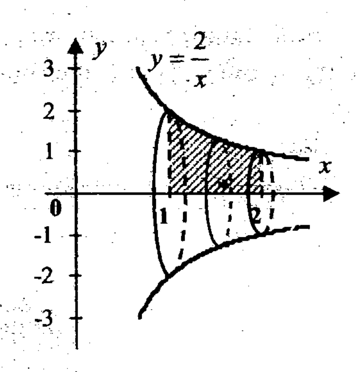
5.39. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной функцией $xy = 2$, прямыми $x = 1$, $x = 2$ и осью абсцисс.

Решение:

Функция $xy = 2$ является гиперболой $y = \dfrac{2}{x}$.

$$V_{\text{т.вр.}} = \pi\int_1^2 \left(\frac{2}{x}\right)^2 dx = 4\pi\int_1^2 \frac{dx}{x^2} =$$

$$= 4\pi \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2 = 4\pi\left(-\frac{1}{2}+1\right) = 2\pi$$

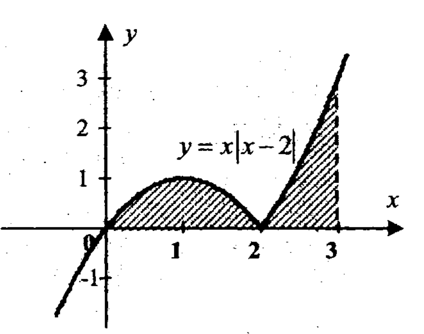


Ответ: 2π.

5.40. Найдите объем фигуры, полученной при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, граница которой задана уравнениями: $y = x|x-2|$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$.

Решение:

Сделаем эскиз графика.



По определению модуля:

$$y = x|x-2| = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \ge 2; \\ 2x - x^2, & x < 2. \end{cases}$$

$$V_{\text{т.вр.}} = \pi\int_0^2 \left(2x - x^2\right)^2 dx + \pi\int_2^3 \left(x^2 - 2x\right)^2 dx = \pi\int_0^3 \left(x^2 - 2x\right)^2 dx =$$

$$= \pi\int_0^3 \left(x^4 - 4x^3 + 4x^2\right) dx = = \pi \cdot \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{243}{5} - 81 + 36\right) = 3{,}6\pi$$

Ответ: $3{,}6\pi$.

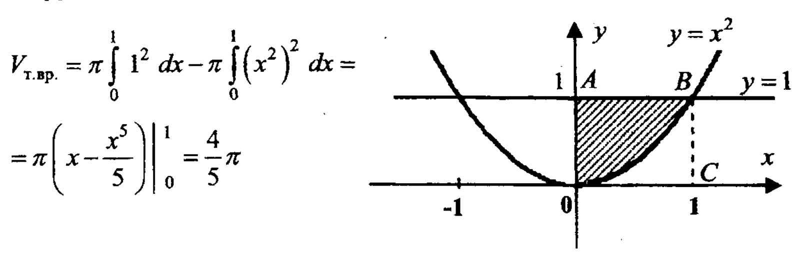
5.41. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$, осью ординат и прямой $y=1$.

Решение:

Искомый объем можно найти как разность объемов *цилиндра*, полученного вращением единичного квадрата $OABC$ вокруг оси Ox, и *фигуры*, ограниченной параболой $y=x^2$, вращающейся вокруг оси Ox.

$$V_{\text{т.вр.}} = \pi\int_0^1 1^2\,dx - \pi\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx =$$

$$= \pi\left(x-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{5}\pi$$

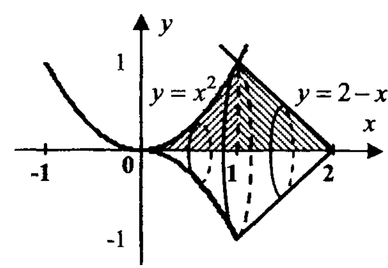


Ответ: $\dfrac{4\pi}{5}$.

5.42. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=2-x$, $y=0$.

Решение:

Парабола $y=x^2$ пересекается с прямой $y=2-x$ в точке с абсциссой $x=1$ (вторая точка пересечения $(-2;4)$ не принадлежит телу вращения).



Объем тела вращения можно определить, разбив его на две части: *фигуру*, полученную при вращении вокруг оси абсцисс параболы $y = x^2$ при $0 \le x \le 1$; и *конус*, который получается в результате вращения прямой $y = 2 - x$ вокруг оси Ox при $1 \le x \le 2$.

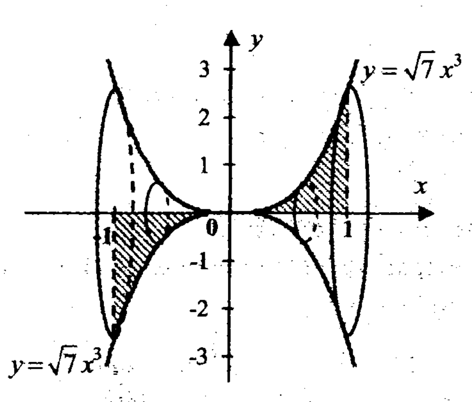
$$V_{\text{т.вр.}} = \pi \int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx + \pi \int_1^2 (2-x)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx + \pi \int_1^2 (x-2)^2 dx =$$

$$= \pi \cdot \frac{x^5}{5}\bigg|_0^1 + \pi \cdot \frac{(x-2)^3}{3}\bigg|_1^2 = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{15}$$

Ответ: $\frac{8\pi}{15}$.

5.43. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{7}\,x^3$, $y = 0$, $x = -1$ и $x = 1$.

Решение:



Учитывая, что функция $y = \sqrt{7}\,x^3$ на интервале $[-1;1]$ нечетная, объем тела можно вычислить как:

$$V_{\text{т.вр.}} = \pi \int_{-1}^1 \left(\sqrt{7}x^3\right)^2 dx = 2\pi \int_0^1 \left(\sqrt{7}x^3\right)^2 dx = 2\pi \int_0^1 7x^6\, dx = 2\pi \cdot x^7 \bigg|_0^1 = 2\pi$$

Ответ: 2π.

Перемещение s материальной точки, движущейся прямолинейно со скоростью $\upsilon=\upsilon(t)$, за интервал времени от $t=a$ до $t=b$ вычисляется по формуле:

$$s=\int_a^b \upsilon(t)\,dt.$$

5.44. Тело движется прямолинейно, его скорость изменяется по закону $\upsilon(t)=2t+4$. В момент времени $t=3$ тело находится на расстоянии $s=21$ от начала отсчета. Найдите формулу, которой задается зависимость расстояния от времени.

Решение:

Исходя из физического смысла производной, скорость тела в произвольный момент времени есть производная уравнения движения, то есть $s'(t)=\upsilon(t)$. Следовательно, если задано уравнение скорости тела, чтобы определить зависимость расстояния от времени, необходимо найти первообразную для функции скорости:

$s(t)=t^2+4t+C$.

Так как в момент времени $t=3$ тело находится на расстоянии $s=21$ от начала отсчета, должно выполняться соотношение:

$s(3)=21;\qquad 3^2+4\cdot3+C=21;\qquad C=0$.

Окончательно, уравнение движения задается формулой:

$s(t)=t^2+4t$.

Ответ: $s(t)=t^2+4t$.

5.45. Точка движется по координатной прямой, ее скорость задана формулой $\upsilon(t)=6t^2-2t+3$ (t - время движения). Известно, что в момент времени $t=1$ координата точки равнялась 7. Найдите координату точки в момент времени $t=2$.

Решение:

Найдем функциональную зависимость координаты точки x от времени t как первообразную функции скорости:

$x(t)=2t^3-t^2+3t+C$.

Зная, что в момент времени $t=1$ координата точки равнялась 7, можно однозначно определить значение константы C:

$x(1)=7$; $2\cdot 1^3-1^2+3\cdot 1+C=7$; $C=3$.

Таким образом, уравнение движения точки по прямой имеет вид:
$x(t)=2t^3-t^2+3t+3$.

В момент времени $t=2$ координата точки равна:
$x(2)=2\cdot 2^3-2^2+3\cdot 2+3=21$.

Ответ: 21.

5.46. Точка движется вдоль прямой со скоростью $\upsilon(t)=4-\dfrac{2}{\sqrt{t-1}}$. Найдите путь, пройденный то 'кой в промежутке $[2;5]$.

Решение:

Исходя из физического смысла определенного интеграла, путь, пройденный точкой, можно определить как:

$$s=\int_2^5 \upsilon(t)\,dt=\int_2^5\left(4-\frac{2}{\sqrt{t-1}}\right)dt=\left(4t-2\cdot 2\sqrt{t-1}\right)\Big|_2^5=$$
$$=(20-8)-(8-4)=8.$$

Ответ: 8.

5.47. Скорость поезда, движущегося под уклон, задана уравнением $\upsilon(t)=15+0{,}2t$. Вычислите длину уклона, если поезд прошел его за 20 с (путь измеряется в метрах).

Решение:

Длину уклона можно определить как путь, пройденный поездом, движущимся прямолинейно со скоростью $\upsilon(t)=15+0{,}2t$, за интервал времени от $t=0$ до $t=20$, то есть:

$$s=\int_0^{20}\upsilon(t)\,dt=\int_0^{20}(15+0{,}2t)\,dt=\left(15t+0{,}1t^2\right)\Big|_0^{20}=(300+40)-0=340.$$

Ответ: 340 м.

5.48. Скорость прямолинейно движущегося тела равна $\upsilon(t)=4t-t^2$. Вычислите путь, пройденный телом от начала движения до полной остановки (путь измеряется в метрах).

Решение:

Тело остановится в тот момент, когда его скорость станет равной нулю, то есть:

$4t - t^2 = 0$

$t_1 = 0$; $t_2 = 4$

Момент времени $t = 0$ не подходит по смыслу задачи, следовательно, тело остановится через 4 с после начала движения.

Тогда путь пройденный телом можно определить как:

$$s = \int_0^4 \upsilon(t)\,dt = \int_0^4 \left(4t - t^2\right) dt = \left(2t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = \left(32 - \frac{64}{3}\right) - 0 = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

Ответ: $10\frac{2}{3}$ м.

5.49. Два тела движутся по одной и той же прямой: первое со скоростью $\upsilon_1(t) = 3t^2 - 4t$, второе со скоростью $\upsilon_2(t) = 4(t+3)$. Если в начальный момент времени они были в одной точке, то через какое время и на каком расстоянии от точки начала движения они снова окажутся в одной точке?

Решение:

Найдем функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$, выражающие зависимость координат точек от времени, как первообразные функций скорости:

$x_1(t) = t^3 - 2t^2 + C_1$;

$x_2(t) = 2t^2 + 12t + C_2$.

Поскольку в начальный момент времени $t = 0$ оба тела находились в одной точке, которую можно принять за начала координат, получаем:

$x_1(0) = x_2(0) = 0$,

то есть $C_1 = C_2 = 0$.

Найдем момент времени $t > 0$, при котором $x_1(t) = x_2(t)$:

$t^3 - 2t^2 = 2t^2 + 12t$

$t\left(t^2 - 4t - 12\right) = 0$

$t_1 = 0$, $t_2 = 6$, $t_3 = -2$.

По смыслу задачи, из трех полученных значений подходит только $t = 6$. Тогда $x_1(6) = x_2(6) = 144$.

Ответ: через 6 с на расстоянии 144 м.

ГЛАВА VIII. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

Опыт приемных экзаменов в вузы прошлых лет показывает, что некоторые разделы теоретического курса геометрии и многие приемы и способы решения геометрических задач вызывают у поступающих серьезные трудности прежде всего из-за того, что требуют четкости и последовательности в рассуждениях, понимания логических связей между различными этапами решения задачи. Ниже мы подробно рассмотрим основные разделы курса элементарной геометрии. При этом предполагается, что материал программы приемных экзаменов уже известен читателю в объеме школьных учебников.

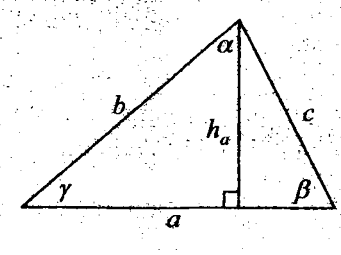
Цель раздела – помочь учащимся систематизировать свои знания по решению задач за курс средней школы, а также ознакомиться с методами решения некоторых задач.

В отличие от алгебры, в геометрии почти нет стандартных задач, решающихся по образцам. Практически каждая геометрическая задача требует «индивидуального» подхода. В данной главе мы рассмотрим некоторые способы решения задач, характерные именно для геометрии, покажем различные приемы и методы, которые используются при решении геометрических задач.

§1. ТРЕУГОЛЬНИКИ

Основные сведения

<u>Произвольный треугольник</u>



a, b, c - стороны

α, β, γ - противолежащие им углы

p - полупериметр

R - радиус описанной окружности

r - радиус вписанной окружности

S - площадь треугольника

h_a - высота, проведенная к стороне a

$$S=\frac{1}{2}a\cdot h_a$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ (формула Герона)

$$S=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin\alpha$$

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} \quad \text{(радиус описанной окружности)}$$

$$r = \frac{S}{p} \quad \text{(радиус вписанной окружности)}$$

Следует иметь в виду, что:

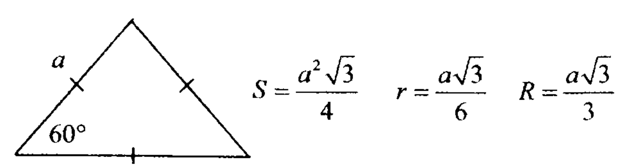
1. центр окружности, вписанной в треугольник, находится в точке пересечения биссектрис треугольника;

2. центр окружности, описанной около треугольника, находится в точке пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника.

Прямоугольный треугольник

b, a, h_c, α, c_b, c_a $b^2 = c \cdot c_b$ $a^2 = c \cdot c_a$ ${h_c}^2 = c_b \cdot c_a$ $h_c = \frac{a \cdot b}{c}$ $a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора)	$R = \frac{c}{2}$ (центр описанной окружности находится на середине гипотенузы) $r = \frac{a + b - c}{2}$
	$S = \frac{1}{2} c \cdot h_c$ $S = \frac{1}{2} a \cdot b$ $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha$
	если $\alpha = 30°$, то $c = 2a$
$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $tg\alpha = \frac{a}{b}$, $ctg\alpha = \frac{b}{a}$	

Равносторонний треугольник



Следует иметь в виду, что:

1. Каждая медиана равностороннего треугольника совпадает с биссектрисой и высотой, проведенными из той же вершины.

2. Центры вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника совпадают.

Метод поэтапного решения задач с использованием различных теорем

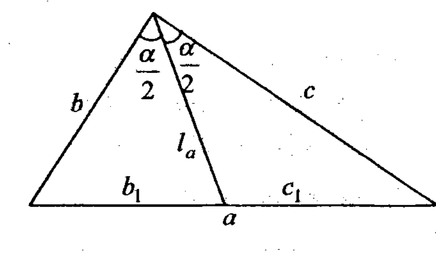
Большой класс задач решается с помощью различных теорем.

Условия подобных задач таковы, что можно непосредственными вычислениями получить искомый результат.

В данном параграфе мы сделаем некоторые замечания общего характера по ряду теорем геометрии, часто встречающихся в ЕНТ, а также разберем некоторые задачи.

1. Рассмотрим **теорему о свойстве биссектрисы** внутреннего угла треугольника.

Теорема. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам: $\frac{b_1}{c_1}=\frac{b}{c}$.



Длина биссектрисы:

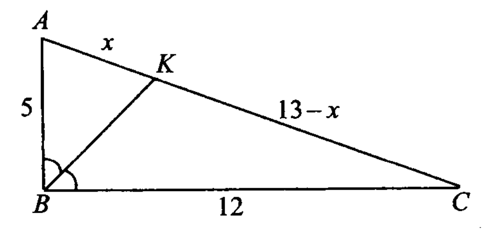
$$l_a=\frac{2b\cdot c\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$$

$$l_a^2=b\cdot c-b_1\cdot c_1$$

$$l_a=\frac{\sqrt{b\cdot c(b+c+a)(b+c-a)}}{b+c}$$

1.1. В прямоугольном треугольнике катеты равны 12 и 5 соответственно. Найдите длины отрезков, на которые делит гипотенузу биссектриса прямого угла.

Решение:



1) $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{25+144} = 13$

2) Обозначим $AK = x$, тогда $CK = 13 - x$.

BK - биссектриса $\angle B$, значит: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AK}{CK}$.

$$\frac{5}{12} = \frac{x}{13-x}$$

$$5(13-x) = 12x$$

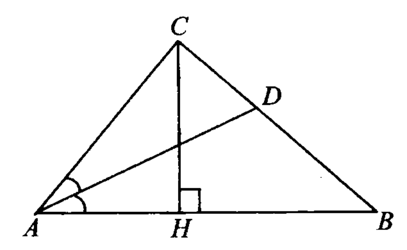
$$65 = 17x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{65}{17}$$

$$AK = \frac{65}{17}, \quad CK = AC - AK = 13 - \frac{65}{17} = \frac{156}{17}$$

Ответ: $\dfrac{156}{17}$, $\dfrac{65}{17}$.

1.2. В равнобедренном треугольнике ABC длина основания AB равна $\sqrt{2}$, угол при основании равен $30°$. Найдите длину биссектрисы AD.

Решение:



1) ΔAHC: $\cos 30° = \dfrac{AH}{AC}$

$$AC = \frac{AH}{\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

2) $$AD = \frac{\sqrt{AC \cdot AB(AC + AB + BC)(AC + AB - BC)}}{AC + AB} =$$

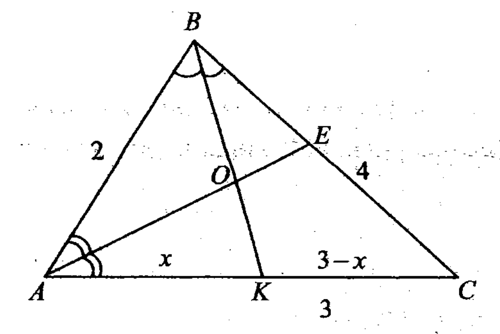
$$= \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{2}\left(\frac{2\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}\left(4 + 2\sqrt{3}\right)}}{\frac{\sqrt{6}}{3}\left(1 + \sqrt{3}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right)^2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}\left(1 + \sqrt{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\sqrt{3} + 1\right)}{\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\sqrt{3} + 1\right)} = 1$$

Ответ: 1.

1.3. В треугольнике ABC длины сторон CB, CA и AB соответственно равны 4, 3 и 2. Найдите отношение, в котором точка пересечения биссектрис делит биссектрису угла (считая от вершины B).

Решение:



1) Рассмотрим ΔABC:

BK - биссектриса $\angle B \Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AK}{KC}$

$$\frac{2}{4} = \frac{x}{3 - x}$$

$$6 - 2x = 4x$$

$x=1$, $AK=1$

2) Рассмотрим ΔABK :

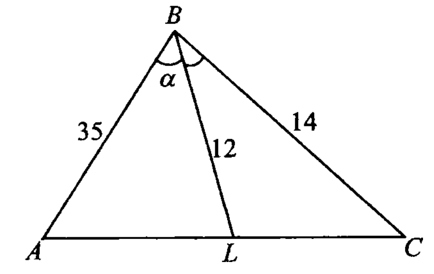
AO - биссектриса $\angle A$ $\Rightarrow$ $\dfrac{AB}{AK}=\dfrac{BO}{OK}$

$\dfrac{BO}{OK}=\dfrac{2}{1}$

Ответ: 2:1.

1.4. Определите площадь треугольника, если две его стороны равны 35 и 14, а биссектриса угла между ними равна 12.

Решение:



1) $BL=\dfrac{2AB\cdot BC\cdot\cos\alpha}{AB+BC}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{2\cdot35\cdot14\cdot\cos\alpha}{49}=12$ $\Rightarrow$ $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$

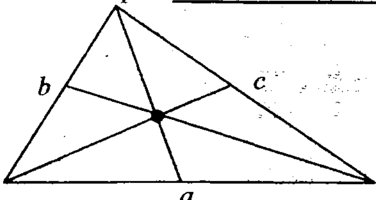
2) $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}=\dfrac{4}{5}$

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{24}{25}$

3) $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin2\alpha=\dfrac{1}{2}\cdot35\cdot14\cdot\dfrac{24}{25}=235{,}2$

Ответ: 235,2.

2. Рассмотрим **<u>свойства медиан</u>** в треугольнике.



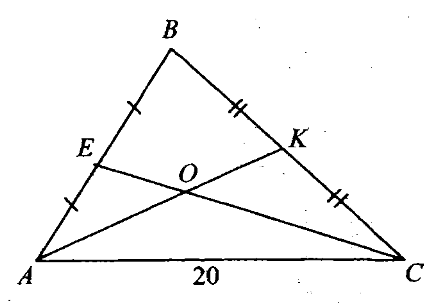
а) Каждая медиана точкой пересечения делится в отношении $2:1$, считая от вершины.

b) Три медианы делят треугольник на 6 равновеликих (одинаковых по площади) треугольников.

с) Длина медианы: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

1.5. Основание треугольника равно 20, медианы боковых сторон равны 18 и 24. Найдите площадь треугольника.

Решение:



1) Рассмотрим ΔAOC :

$AO = \frac{2}{3}AK = \frac{2}{3} \cdot 18 = 12$; $OC = \frac{2}{3}CE = \frac{2}{3} \cdot 24 = 16$

2) $S_{\Delta AOC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 8} = 12 \cdot 8 = 96$

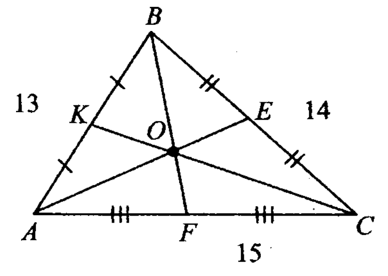
$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}$

$S_{\Delta ABC} = 3 \cdot S_{\Delta AOC} = 3 \cdot 96 = 288$

Ответ: 288.

1.6. Стороны треугольника ABC равны 15, 14 и 13. O - точка пересечения медиан. Найдите площадь треугольника AOB.

Решение:



$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = \sqrt{7^2\cdot 3^2\cdot 4^2} =$$

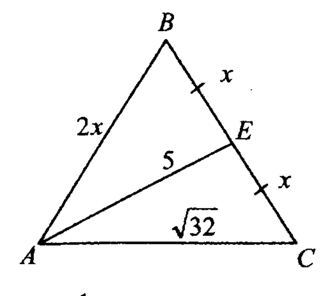
$$= 7\cdot 3\cdot 4 = 84$$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}\cdot 84 = 28$$

Ответ: 28.

1.7. Основание равнобедренного треугольника $\sqrt{32}$, а медиана боковой стороны 5. Найдите длины боковых сторон.

Решение:



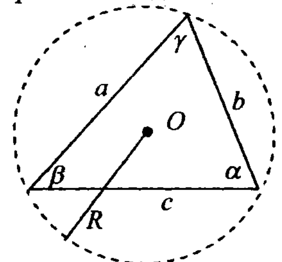
$$AE^2 = \frac{1}{4}\left(2\cdot AB^2 + 2\cdot AC^2 - BC^2\right)$$

$$25 = \frac{1}{4}\left(8x^2 + 64 - 4x^2\right)$$

$$4x^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad AB = BC = 6$$

Ответ: 6; 6.

3. Рассмотрим применение **теоремы синусов** для решения геометрических задач.



Теорема синусов.

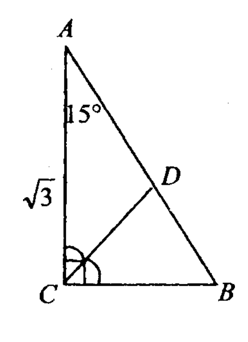
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,$$

где R - радиус описанной окружности.

1.8. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $15°$, $AC=\sqrt{3}$. CD - биссектриса треугольника. Найдите длину AD.

Решение:

1) Рассмотрим ΔACD: $\angle ACD=45°$, $\angle ADC=120°$.



2) По теореме синусов:

$$\frac{AD}{\sin\angle ACD}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$$

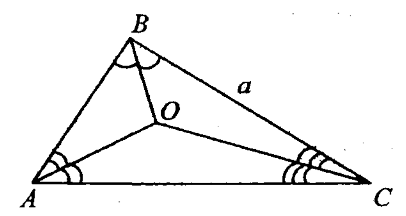
$$\frac{AD}{\sin 45°}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 120°}$$

$$AD=\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

1.9. Дан треугольник ABC. $\angle BAC=\alpha$, $BC=a$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC, где O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение:



1) В ΔBOC по теореме синусов:

$$2R = \frac{a}{\sin\angle BOC} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{a}{2\sin\angle BOC}$$

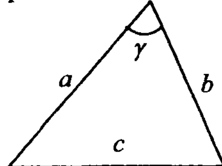
2) $\sin\angle BOC = \sin\left(180° - \frac{\angle B + \angle C}{2}\right) = \sin\left(\frac{\angle B + \angle C}{2}\right) =$

$= \sin\left(\frac{180° - \alpha}{2}\right) = \sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}$

Значит, $R = \dfrac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Ответ: $\dfrac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

4. Рассмотрим применение **теоремы косинусов** для решения геометрических задач.

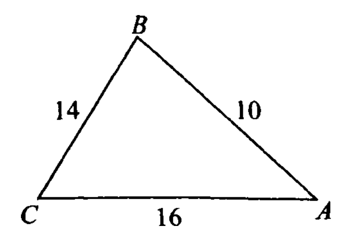


Теорема косинусов:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos\gamma$

1.10. Найдите угол A в треугольнике ABC со сторонами $a = 14$, $b = 16$, $c = 10$.

Решение:



По теореме косинусов:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle A$

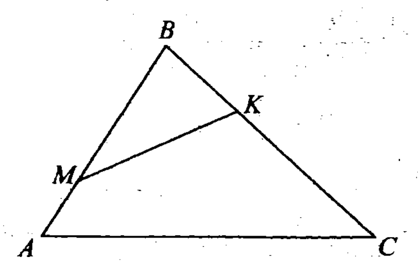
$$\cos\angle A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{10^2 + 16^2 - 14^2}{2 \cdot 10 \cdot 16} = \frac{100 + 2 \cdot 30}{2 \cdot 160} = \frac{1}{2}$$

$\angle A = 60°$

Ответ: $\angle A = 60°$.

1.11. В треугольнике ABC известны стороны: $AB=3$, $BC=5$, $CA=6$. На стороне AB взята точка M так, что $BM=2AM$, а на стороне BC взята точка K так, что $3BK=2KC$. Найдите длину отрезка MK.

Решение:



1) Так как $BM=2AM$, то $BM=2$, $AM=1$.

Так как $3BK=2KC$, то $BK=2$, $CK=3$.

2) Рассмотрим ΔABC:

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle B$ (т. косинусов)

$$\cos\angle B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{9+25-36}{2\cdot 3\cdot 5}=\frac{-2}{30}=-\frac{1}{15}$$

3) Рассмотрим ΔMBK: $MK^2=BM^2+BK^2-2BM\cdot BK\cdot\cos\angle B$

$$MK^2=4+4-2\cdot 2\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{15}\right)=8+\frac{8}{15}=8\left(1+\frac{1}{15}\right)=\frac{8\cdot 16}{15}$$

$$MK=8\sqrt{\frac{2}{15}}$$

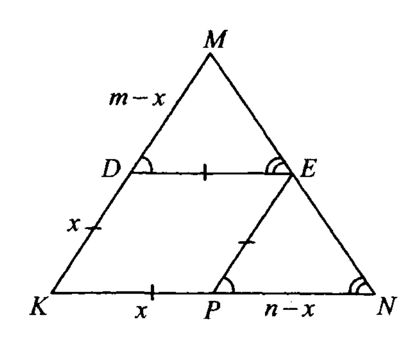
Ответ: $MK=8\sqrt{\frac{2}{15}}$.

Метод подобия в геометрических задачах

В данном методе используется подобие некоторых треугольников, образовавшихся в результате дополнительных построений.

1.12. В треугольник KMN вписан ромб так, что угол K у них общий, а вершина E находится на стороне MN. Найдите сторону ромба, если $KM=m$, $KN=n$.

Решение:



$\Delta MDE \sim \Delta EPN$ (по двум углам)

$$\frac{MD}{PE} = \frac{DE}{PN}$$

$$\frac{m-x}{x} = \frac{x}{n-x}$$

$$mn - nx - mx + x^2 = x^2$$

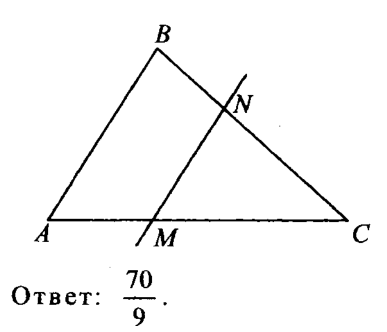
$$mn - x(m+n) = 0$$

$$x = \frac{mn}{m+n} \Rightarrow KD = \frac{mn}{m+n}$$

Ответ: $\frac{mn}{m+n}$.

1.13. Прямая MN $(M \in AC,\ N \in BC)$, параллельная стороне AB треугольника ABC, делит сторону AC в отношении $2:7$, считая от вершины A. Найдите длину отрезка MN, если $AB = 10$.

Решение:



$\Delta ABC \sim \Delta MNC$

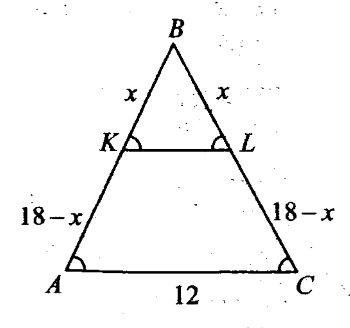
$$\frac{MN}{AB} = \frac{MC}{AC} \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{7}{9}$$

$$MN = \frac{7}{9}AB = \frac{7 \cdot 10}{9} = \frac{70}{9}$$

Ответ: $\frac{70}{9}$.

1.14. Дан равнобедренный треугольник с основанием 12 и боковой стороной 18. Отрезки какой длины нужно отложить от вершины треугольника на его боковых сторонах, чтобы, соединив их концы, получить трапецию с периметром, равным 40.

Решение:



1) Обозначим $BK = BL = x$, тогда $P_{AKLC} = 2AK + KL + AC$.

$2(18 - x) + KL + 12 = 40$

$KL = 2x - 8$

2) $\Delta KBL \sim \Delta ABC$ (по двум углам)

$\frac{BK}{AB} = \frac{KL}{AC} \Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{2x-8}{12} \Rightarrow 24x = 144 \Rightarrow x = 6$

$BK = BL = 6$

Ответ: 6.

Метод решения задач путем дополнительных построений

Говоря о методах решения геометрических задач, следует отметить некоторые особенности данных методов: большое разнообразие, взаимозаменяемость, трудность формального описания, отсутствие четких границ области применения. Кроме того, очень часто при решении некоторых достаточно сложных задач приходится прибегать к использованию комбинаций методов и приемов.

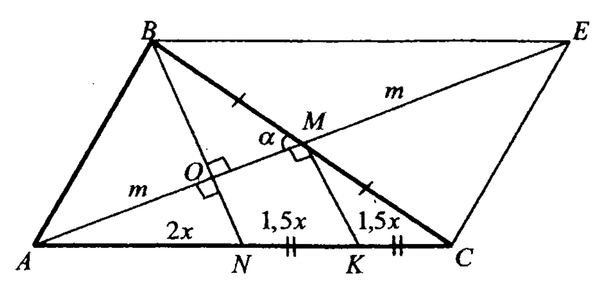
Уже на первом этапе решения – построение чертежа – можно говорить о наличии некоторых специальных приемов:

1. если в условии есть медиана треугольника, то стоит попытаться продолжить эту медиану на такое же расстояние. При этом получится параллелограмм, стороны и одна диагональ которого равны сторонам треугольника, а вторая диагональ равна удвоенной медиане;

2. продолжение отрезка (отрезков) на определенное расстояние или до пересечения с заданной прямой.

1.15. В треугольнике ABC точка N лежит на стороне AC, $AN=\frac{2}{5}AC$, медиана AM перпендикулярна BN. Найдите площадь треугольника ABC, если $AM=m$, $BN=n$.

Решение:



1) Продолжим медиану AM на расстояние, ей равное.

Обозначим $\angle BMA=\alpha$.

$$S_{ABEC}=\frac{1}{2}BC\cdot AE\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}BC\cdot 2m\cdot\sin\alpha=m\cdot BC\cdot\sin\alpha$$

Найдем $BC\cdot\sin\alpha$.

2) Построим $MK\perp AE$.

$\Delta AMK\sim\Delta AON$ (по двум углам)

$$\frac{MK}{ON}=\frac{AK}{AN}\quad\Rightarrow\quad\frac{\frac{1}{2}n}{ON}=\frac{3,5x}{2x}\quad\Rightarrow\quad ON=\frac{n}{3,5}=\frac{2n}{7}$$

3) $BO=BN-ON=n-\frac{2n}{7}=\frac{5n}{7}$

ΔBOM: $BO=BM\cdot\sin\alpha$

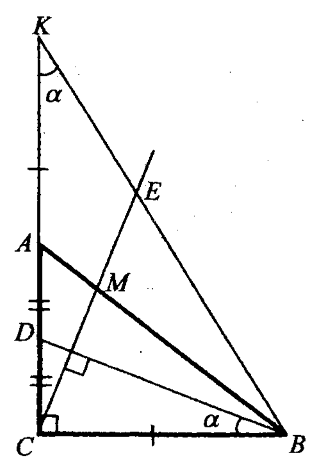
Следовательно: $BC\cdot\sin\alpha=2BM\cdot\sin\alpha=2BO=2\cdot\frac{5n}{7}=\frac{10n}{7}$.

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}S_{ABEC}=\frac{1}{2}m\cdot\frac{10n}{7}=\frac{5mn}{7}$$

Ответ: $\frac{5mn}{7}$.

1.16. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC. Прямая, проведенная через вершину прямого угла C, перпендикулярна медиане BD и пересекает гипотенузу в точке M. Найдите отношение $\frac{AM}{MB}$.

Решение:



1) Построим $AK = CA$.

В ΔKCB BA - медиана (по построению).

Докажем, что CE - медиана.

2) Обозначим: $\angle K = \alpha$, $\angle B = 90° - \alpha$.

$$\left.\begin{array}{ll}\Delta BCK: & tg\alpha = \frac{BC}{CK} = \frac{1}{2} \\ \Delta BCD: & tg\angle CBD = \frac{CD}{BC} = \frac{1}{2}\end{array}\right| \Rightarrow \angle CBD = \alpha$$

3) Рассмотрим ΔCEB:

$\angle ECB = \angle EBC = 90° - \alpha \Rightarrow \Delta CEB$ - равнобедренный

$BE = CE$

4) Рассмотрим ΔCEK:

$\angle CKE = \angle KCE = \alpha \Rightarrow \Delta CEK$ - равнобедренный

$EK = CE$

Значит, $KE = EB$ и CE - медиана.

AB - медиана по построению.

Следовательно $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2}$, так как M - точка пересечения медиан треугольника.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

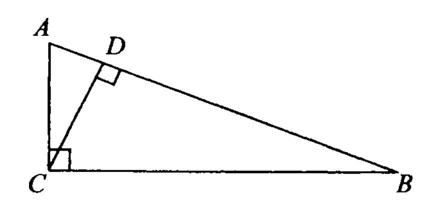
Алгебраические методы решения геометрических задач

Большое значение при решении геометрических задач имеют алгебраические методы. Алгебра, часто в сочетании с тригонометрией, позволяет справиться со многими сложными задачами. Суть алгебраического подхода к геометрическим задачам состоит в том, чтобы для некоторой величины составить из геометрических соображений уравнение, а затем решить его.

Широкие возможности для использования алгебры в геометрии открывают метрические соотношения в треугольнике и круге, формулы решения прямоугольных треугольников, теоремы синусов и косинусов и т.д.

1.17. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с площадями 4 и 16. Найдите длину гипотенузы.

Решение:



Обозначим: $AD=x$, $DB=y$, $CD=h$.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x\cdot h=4 \\ \frac{1}{2}y\cdot h=16 \\ h^2=x\cdot y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\cdot h=8 \\ y\cdot h=32 \\ h^2=x\cdot y \end{cases} \overset{(1)\cdot(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} h^2\cdot x\cdot y=256 \\ h^2=x\cdot y \end{cases}$$

$h^4 = 256 \quad \Rightarrow \quad h = 4$

$AD = x = \dfrac{8}{h} = 2$ и $DB = y = \dfrac{32}{h} = 8$

$AB = AD + DB = 10$

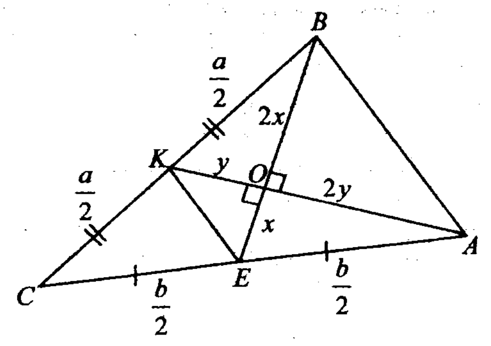
Ответ: 10.

1.18. Две стороны треугольника a и b. Медианы, проведенные к этим сторонам взаимно перпендикулярны. Найдите третью сторону.

Решение:

Обозначим: $OE = x$, $OB = 2x$,

$OK = y$, $OA = 2y$.



ΔOEA: $x^2 + 4y^2 = \dfrac{b^2}{4}$; $\qquad \Delta OKB$: $y^2 + 4x^2 = \dfrac{a^2}{4}$

Составим систему уравнений:

$$+\begin{cases} x^2 + 4y^2 = \dfrac{b^2}{4} \\ y^2 + 4x^2 = \dfrac{a^2}{4} \end{cases} \Rightarrow 5x^2 + 5y^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{20}$$

ΔKOE: $KE = \sqrt{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{5}}$

$AB = 2KE = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{5}}$, так как KE - средняя линия в ΔABC.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{5}}$.

1.19. Площадь прямоугольного треугольника равна 24, а гипотенуза равна 10. Найдите радиус вписанной окружности.

Решение:

Обозначим катеты x и y.

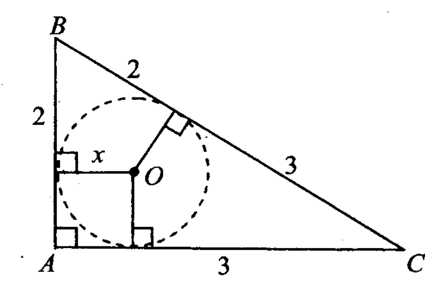
$$\begin{cases} \frac{1}{2}xy = 24 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 48 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases}$$

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{6+8-10}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ответ: 2.

1.20. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания делит гипотенузу на отрезки, равные 2 и 3. Найдите радиус этой окружности.

Решение:



Обозначим через x - радиус вписанной окружности.

Тогда $AB = 2 + x$, $AC = 3 + x$, $BC = 5$.

По теореме Пифагора составим уравнение:

$$(2+x)^2 + (3+x)^2 = 5^2$$

$$2x^2 + 10x + 13 = 25$$

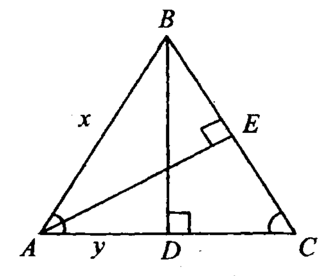
$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad r = 1$$

Ответ: 1.

1.21. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание равна 10, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12.

Решение:



Обозначим: $AB = x$, $AD = y$.

1) $\Delta ABD \sim \Delta AEC$ (по двум углам)

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{AE} \Rightarrow \frac{x}{2y} = \frac{10}{12} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \Rightarrow y = 0,6x$$

2) ΔABD:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$x^2 = 0,36x^2 + 100$$

$$0,64x^2 = 100$$

$$x^2 = \frac{10000}{64} \Rightarrow x = \frac{100}{8} = \frac{25}{2} = 12,5$$

$$AB = BC = 12,5$$

3) ΔABC: $S = \frac{1}{2} AE \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12,5 = 75$

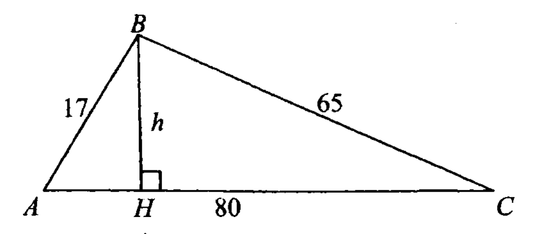
Ответ: 75.

Метод площадей в геометрических задачах

Формулы, выражающие площадь треугольника, могут быть с успехом использованы для составления уравнений. В данном методе приравниваются два выражения для площади треугольника.

1.22. Найдите наименьшую высоту треугольника со сторонами 17, 65 и 80.

Решение:



Наименьшая высота та, которая проведена к большей стороне.

1) $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BH\cdot AC=\frac{1}{2}h\cdot 80=40h$

2) $S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\frac{a+b+c}{2}$

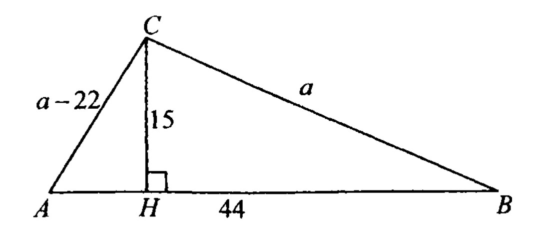
$S_{\Delta ABC}=\sqrt{81\cdot 64\cdot 16\cdot 1}=9\cdot 8\cdot 4=288$

3) $40h=288 \quad\Rightarrow\quad h=7{,}2$

Ответ: 7,2.

1.23. В треугольнике ABC сторона $c=44$, опущенная на нее из вершины C высота $h_c=15$, разность длин сторон $a-b=22$. Чему равны стороны a и b?

Решение:



По условию: $a-b=22 \;\Rightarrow\; b=a-22$.

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}CH\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 44=330$

$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\dfrac{a+b+c}{2}$

$S_{\Delta ABC}=\sqrt{(a+11)(a+11-a)(a+11-a+22)(a+11-44)}=$

$=\sqrt{(a+11)(a-33)\cdot 11\cdot 33}$

$11\cdot 33\cdot(a+11)(a-33)=(15\cdot 22)^2$

$a^2-22a-363=300$

$a^2-22a-663=0$

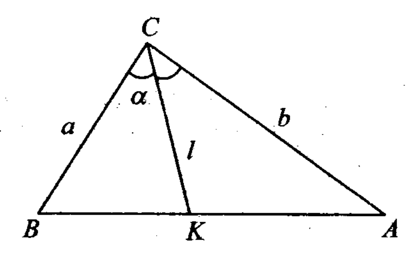
$a_1=39$ и $b_1=17$

$a_2=-17$ - не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 39, 17.

1.24. В треугольнике ABC известны стороны a, b и угол C между ними. Чему равна длина биссектрисы, исходящей из вершины C?

Решение:



Обозначим $\angle BCK=\alpha$.

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AC\cdot\sin\angle C=\dfrac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin 2\alpha$

$S_{\Delta ACK}=\dfrac{1}{2}AC\cdot CK\cdot\sin\alpha=\dfrac{1}{2}b\cdot l\cdot\sin\alpha$

$S_{\Delta BCK}=\dfrac{1}{2}BC\cdot CK\cdot\sin\alpha=\dfrac{1}{2}a\cdot l\cdot\sin\alpha$

$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ACK}+S_{\Delta BCK}$

$\dfrac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin 2\alpha=\dfrac{1}{2}b\cdot l\cdot\sin\alpha+\dfrac{1}{2}a\cdot l\cdot\sin\alpha$

$$a \cdot b \cdot \sin 2\alpha = l \cdot \sin\alpha (a+b)$$

$$l = \frac{a \cdot b \cdot \sin 2\alpha}{(a+b)\sin\alpha} = \frac{2a \cdot b \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{(a+b)\sin\alpha} = \frac{2ab\cos\frac{\angle C}{2}}{(a+b)}$$

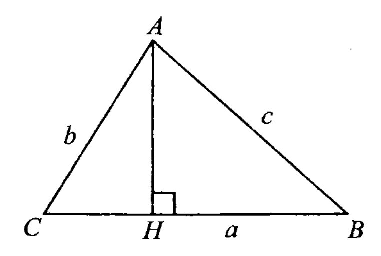
Ответ: $\dfrac{2ab\cos\frac{\angle C}{2}}{a+b}$.

Метод уравнивания в геометрических задачах

При решении геометрических задач часто используется так называемый метод уравнивания. Он заключается в следующем: одна из величин, не являющаяся искомой, выражается двумя способами через данные в условии величины. Такую величину называют опорной. По крайней мере, одно из этих двух выражений должно содержать величину, которую требуется найти. Тогда, приравнивая два выражения, получаем уравнение относительно искомой величины. Сама же опорная величина при составлении уравнения исключается.

1.25. В остроугольном треугольнике ABC со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ проведена высота AH. Найдите, в каком отношении точка H делит сторону BC.

Решение:



Дважды выразим AH.

ΔABH: $AH^2 = c^2 - BH^2$

ΔACH: $AH^2 = b^2 - CH^2 = b^2 - (a - BH)^2$

Приравняв два данных выражения, получим уравнение:

$c^2 - BH^2 = b^2 - (a - BH)^2$

$$c^2 - BH^2 = b^2 - a^2 + 2a \cdot BH - BH^2$$

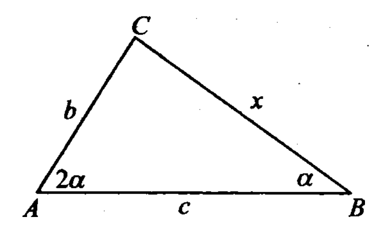
$$BH = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \Rightarrow CH = a - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

$$\frac{CH}{BH} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2}$$

Ответ: $\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2}$.

1.26. В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла B, $AB = c$, $AC = b$. Найдите третью строну BC.

Решение:



Обозначим: $BC = x$, $\angle B = \alpha$, $\angle A = 2\alpha$.

По теореме синусов:

$$\frac{x}{\sin 2\alpha} = \frac{b}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{x}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{b}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{x}{2\cos\alpha} = \frac{b}{1}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{2b}$$

По теореме косинусов:

$$b^2 = x^2 + c^2 - 2x \cdot c \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{x^2 + c^2 - b^2}{2x \cdot c}$$

Значит: $\dfrac{x}{2b} = \dfrac{x^2 + c^2 - b^2}{2x \cdot c}$

$$2x^2 \cdot c = 2b \cdot x^2 + 2b \cdot c^2 - 2b^3$$

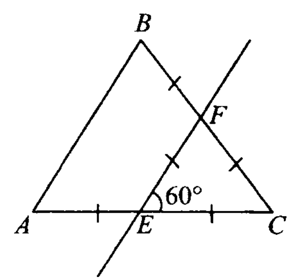
$$x^2(c - b) = b(c^2 - b^2) \Rightarrow x^2 = \frac{b(c-b)(c+b)}{c-b} \Rightarrow x = \sqrt{b(c+b)}$$

Ответ: $\sqrt{b(c+b)}$.

Большая группа задач по геометрии решается методом введения вспомогательного элемента, для которого по условию задачи необходимо составить и решить уравнение. В качестве вспомогательного элемента можно брать линейный размер или угол. Тогда с помощью пропорций или вспомогательных геометрических построений составляется уравнение, в котором введенный элемент как член уравнения сокращается, а найти искомый не представляет большого труда.

1.27. Во сколько раз площадь равностороннего треугольника больше площади треугольника, отсекаемого от него прямой, проходящей через середину его стороны и составляющей угол $60°$ с этой стороной?

Решение:



Вспомогательный отрезок рекомендуется вводить, если в условии задачи не даны линейные элементы и требуется найти зависимость между площадями.

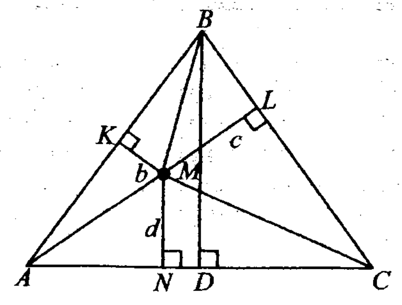
Пусть $AB = BC = AC = a$, тогда $EF = FC = EC = \frac{a}{2}$.

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta EFC}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 60°}{\frac{1}{2} EF \cdot EC \cdot \sin 60°} = \frac{a \cdot a}{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = 4$$

Ответ: в 4 раза.

1.28. Внутри равностороннего треугольника взята точка M, отстоящая от его сторон на расстоянии b, c, d. Найдите высоту треугольника.

Решение:



Введем вспомогательный элемент, сторону равностороннего треугольника - x.

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}x\cdot h$$

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta AMB}+S_{\Delta BMC}+S_{\Delta AMC}=\frac{1}{2}MK\cdot AB+\frac{1}{2}ML\cdot BC+\frac{1}{2}MN\cdot AC=$$

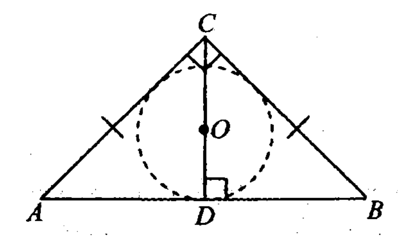
$$=\frac{1}{2}x(b+c+d)$$

$$\frac{1}{2}x\cdot h=\frac{1}{2}x(b+c+d)\quad\Rightarrow\quad h=b+c+d$$

Ответ: $b+c+d$.

1.29. Найдите отношение радиуса окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, к высоте, проведенной к гипотенузе.

***Решение*:**



Введем вспомогательный элемент, катет прямоугольного треугольника - x.

Тогда $AC = CB = x$, $AB = \sqrt{2}x$, $CD = \dfrac{AC \cdot CB}{AB} = \dfrac{x \cdot x}{\sqrt{2}x} = \dfrac{\sqrt{2}x}{2}$.

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

$$OD = \frac{AC + CB - AB}{2} = \frac{x + x - \sqrt{2}x}{2} = \frac{x\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}$$

$$\frac{OD}{CD} = \frac{x\left(2-\sqrt{2}\right)}{2} : \frac{\sqrt{2}x}{2} = \frac{x\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}x} = \sqrt{2}-1$$

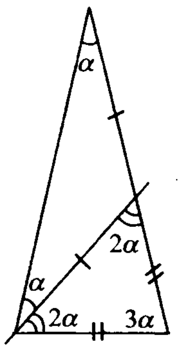
Ответ: $\sqrt{2}-1$.

Геометрические задачи, распадающиеся на несколько случаев

1.30. Найдите углы равнобедренного треугольника, если известно, что найдется прямая, проходящая через вершину угла при основании, разбивающая исходный треугольник на два равнобедренных.

Решение:

1 случай:



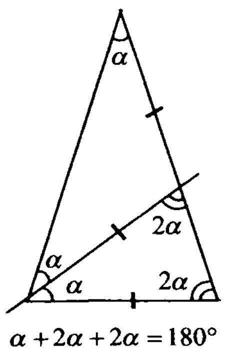
$2\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180°$

$7\alpha = 180°$

$\alpha = 25\frac{5°}{7}$

Ответ: $25\frac{5°}{7}$, $77\frac{1°}{7}$, $77\frac{1°}{7}$.

2 случай:



$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$

$5\alpha = 180°$

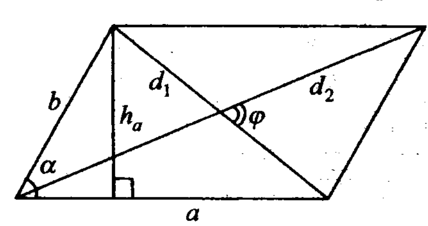
$\alpha = 36°$

Ответ: $36°$, $72°$, $72°$.

§2. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Основные сведения

Параллелограмм



a и b - смежные стороны

α - угол между смежными сторонами

d_1 и d_2 - диагонали

φ - угол между диагоналями

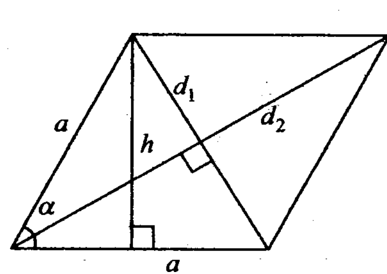
h_a - высота, проведенная к стороне a

$$S = a \cdot h_a = a \cdot b \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$$

$$d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$$

Обе диагонали делят параллелограмм на четыре равновеликих (равных по площади) треугольника.

Ромб



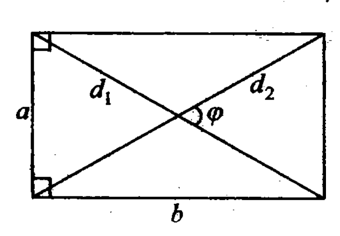
$d_1 \perp d_2$

$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$

$S = a^2 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 = a \cdot h$

$r = \frac{h}{2}$ (радиус вписанной окружности)

Прямоугольник



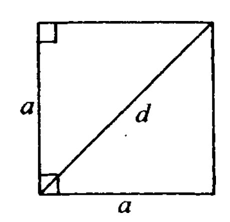
$d_1 = d_2$

$S = a \cdot b = \frac{1}{2} d^2 \sin\varphi$

$d = \sqrt{a^2 + b^2}$ - диагональ прямоугольника

$R = \frac{d}{2}$ (радиус описанной окружности)

Квадрат

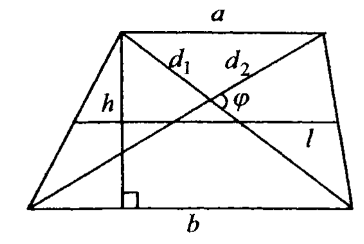


$d_1 = d_2$, $d_1 \perp d_2$, $S = a^2 = \frac{1}{2}d^2$

$R = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{d}{2}$ (радиус описанной окружности)

$r = \frac{a}{2}$ (радиус вписанной окружности)

Трапеция



a и b - основания

h - высота

l - средняя линия

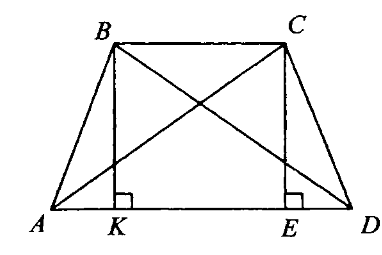
d_1 и d_2 - диагонали

φ - угол между диагоналями

$l = \frac{a+b}{2}$

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = l \cdot h = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$$

Равнобокая (равнобедренная, равнобочная) трапеция



$AB = CD$

$\angle A = \angle D$

$AC = BD$

$BK = CE$

$AK = ED$, $BC = KE$

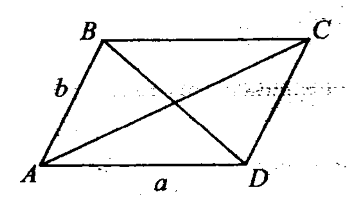
$\Delta ABK = \Delta DCE$ - прямоугольные

Следует иметь в виду, что:

1. Если четырехугольник описан около окружности, то суммы его противоположных сторон равны между собой.

2. Если четырехугольник вписан в окружность, то сумма его противоположных углов равна $180°$.

Метод поэтапного решения задач с использованием различных теорем

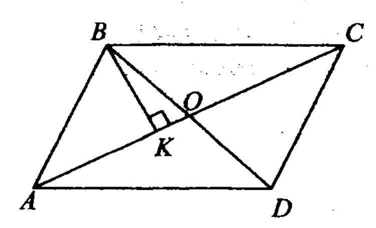


1. Теорема. В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон:

$$AC^2 + BD^2 = 2a^2 + 2b^2$$

2.1. Перпендикуляр, проведенный из вершины параллелограмма к его диагонали, делит эту диагональ на отрезки длиной 6 и 15. Разность длин сторон параллелограмма равна 7. Найдите длины диагоналей параллелограмма.

Решение:



$AK = 6$, $KC = 15$, $AC = AK + KC = 21$.

Обозначим: $AB = x$, тогда $BC = 7 + x$.

1) ΔABK: $BK^2 = AB^2 - AK^2 = x^2 - 36$

ΔBKC: $BK^2 = BC^2 - CK^2 = (7+x)^2 - 225$

Применим метод уравнивания:

$x^2 - 36 = 49 + 14x + x^2 - 225$

$14x = 140$

$x = 10 \Rightarrow AB = 10$ и $BC = 17$

2) $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$

$21^2 + BD^2 = 2(100 + 289)$

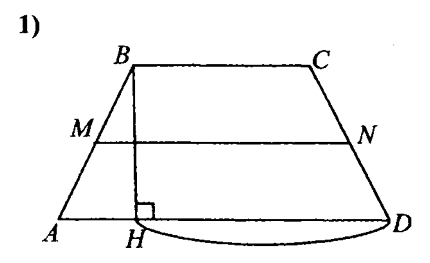
$BD^2 = 337 \Rightarrow BD = \sqrt{337}$.

Ответ: $AC = 21$, $BD = \sqrt{337}$.

Из всех четырехугольников особенно разнообразные задачи связаны с трапециями.

2. <u>Соотношения в трапеции</u>:

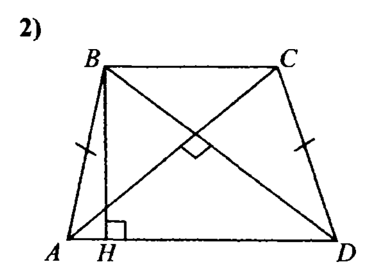
1)



Если $AB = CD$ и MN - средняя линия, то: $HD = MN$.

$S_{ABCD} = BH \cdot HD$.

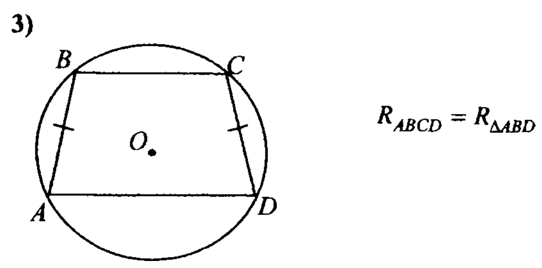
2)



$ABCD$ - равнобедренная трапеция, $AC \perp BD$.

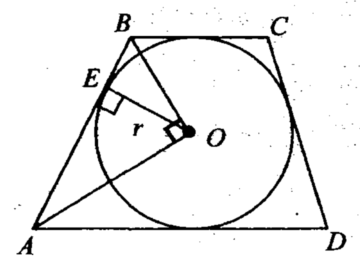
Значит, $BH = HD$.

3)



Вписать в окружность можно только равнобокую трапецию.

4)



$AB + CD = BC + AD$

$\angle AOB = 90°$ - прямой

$OE^2 = AE \cdot BE$

Если в трапецию можно вписать окружность, то высота данной трапеции равна диаметру вписанной окружности.

2.2. Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой высота равна 10, а диагонали взаимно перпендикулярны.

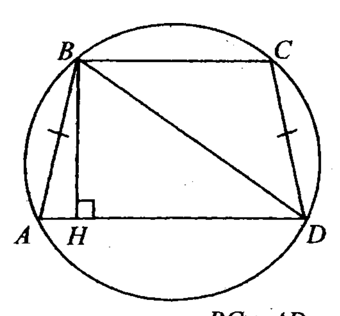
Решение:

Так как трапеция равнобокая и диагонали взаимно перпендикулярны, то средняя линия трапеции равна ее высоте. Значит, $S = h^2 = 100$.

Ответ: 100.

2.3. В равнобедренной трапеции длины оснований 21 и 9, а длина высоты 8. Найдите радиус описанной около трапеции окружности.

Решение:



1) ΔBHD: $HD = \dfrac{BC + AD}{2} = 15$;

$BD = \sqrt{BH^2 + HD^2} = \sqrt{64 + 225} = 17$.

2) ΔABH : $AH = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{21-9}{2} = 6$;

$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{36+64} = 10$.

3) Вычислим радиус описанной окружности около ΔABD :

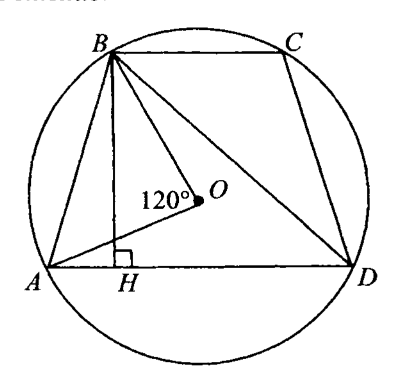
$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{10 \cdot 17 \cdot 21}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 21} = \frac{5 \cdot 17}{8} = \frac{85}{8}.$$

Значит, радиус описанной около трапеции окружности равен $\frac{85}{8}$.

Ответ: $\frac{85}{8}$.

2.4. Около трапеции со средней линией 6 описана окружность. Угол между радиусами окружности, проведенными к концам боковой стороны, равен $120°$. Найдите площадь трапеции.

Решение:



$\angle ADB = \frac{1}{2} \angle AOB = 60°$ (вписанный угол)

ΔBHD : $HD = 6$; $BH = HD \cdot tg 60° = 6\sqrt{3}$.

$S_{ABCD} = HD \cdot BH = 6 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$

Ответ: $36\sqrt{3}$.

2.5. Около круга с радиусом 2 описана равнобокая трапеция с площадью 20. Найдите боковые стороны трапеции.

Решение:

$$S_{\text{трап}} = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

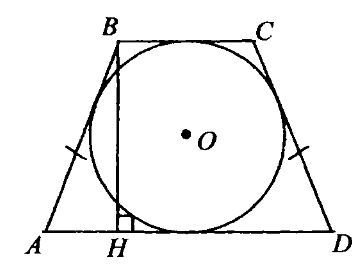
$$\frac{a+b}{2} \cdot 4 = 20 \quad \Rightarrow \quad a+b=10$$

Значит, сумма боковых сторон трапеции также равна 10.

Ответ: Боковая сторона равна 5.

2.6. Около окружности описана равнобокая трапеция, длины оснований которой равны 3 и 6. Найдите радиус окружности.

Решение:



1) $BC + AD = AB + CD$

$$AB = CD = \frac{BC + AD}{2} = \frac{9}{2}$$

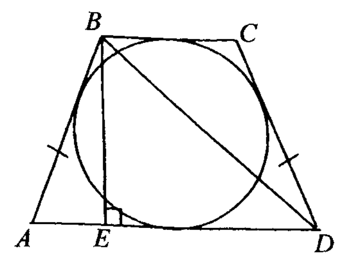
2) ΔABH : $AH = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{6-3}{2} = \dfrac{3}{2}$

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{9}{4}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

3) $r = \dfrac{BH}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ Ответ: $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

2.7. $ABCD$ - трапеция, описанная около окружности. $AB = CD$, $P_{ABCD} = 16$, $BD = 5$. Найдите площадь трапеции.

Решение:



$$AB + CD = BC + AD = \frac{1}{2}P_{ABCD}$$

Значит, $AB = CD = 4$ и $ED = \dfrac{BC + AD}{2} = 4$.

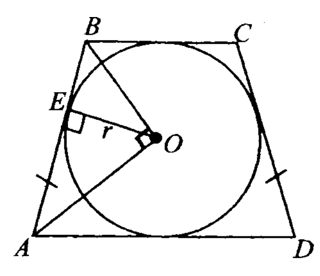
ΔBED: $BE = \sqrt{BD^2 - ED^2} = \sqrt{25-16} = 3$

$S_{\text{трап}} = BE \cdot ED = 3 \cdot 4 = 12$

Ответ: 12.

2.8. В равнобокую трапецию вписана окружность. Точка касания делит боковую сторону в отношении $9:16$, высота трапеции равна 24. Найдите длину средней линии трапеции.

Решение:



$$r = \frac{h}{2} = 12$$

$$\frac{BE}{AE} = \frac{9}{16}$$

Пусть x - коэффициент пропорциональности, тогда:

$BE = 9x$, $AE = 16x$.

ΔABO - прямоугольный:

$r^2 = AE \cdot BE \quad \Rightarrow \quad 12^2 = 16x \cdot 9x \quad \Rightarrow \quad x = 1$

$BE = 9$ и $AE = 16$

$BC + AD = AB + CD$

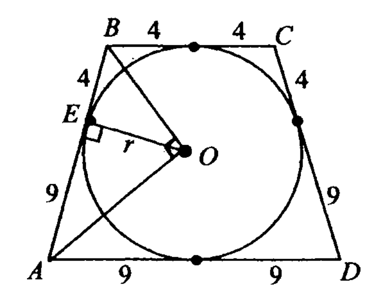
$BC + AD = 50$

Средняя линия трапеции равна 25.

Ответ: 25.

2.9. Около окружности описана равнобокая трапеция, у которой боковая сторона точкой касания делится на отрезки 4 и 9. Найдите площадь трапеции.

Решение:



$\Delta AOB: \ r^2 = AE \cdot BE \quad \Rightarrow \quad r = 6; \quad h = 12$

$BC = 4 + 4 = 8; \quad AD = 9 + 9 = 18$

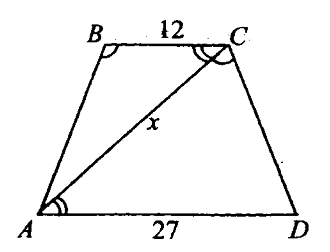
$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h = \frac{8 + 18}{2} \cdot 12 = 156$$

Ответ: 156.

Метод подобия в геометрических задачах

2.10. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 12$ и $AD = 27$. Найдите диагональ AC, если $\angle ABC = \angle ACD$.

Решение:



Пусть $AC = x$

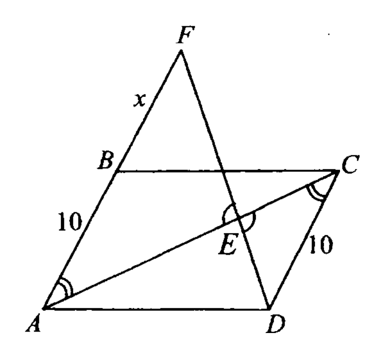
$\Delta ABC \sim \Delta DCA$ (по двум углам)

$$\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{x}{27}=\frac{12}{x} \Rightarrow x^2 = 4\cdot 3\cdot 27 \Rightarrow x=18$$

Ответ: 18.

2.11. На продолжении стороны AB (за точку B) параллелограмма $ABCD$ взята точка F. Определите длину отрезка BF, если длина AB равна 10, $AE:CE=4{,}5:3$ (E - точка пересечения прямой DF с диагональю AC).

Решение:



$\Delta AFE \sim \Delta CDE$ (по двум углам)

$$\frac{AF}{CD}=\frac{AE}{CE} \Rightarrow \frac{10+x}{10}=\frac{4{,}5}{3}; \quad 30+3x=45; \quad 3x=15; \quad x=5.$$

$BF=5$

Ответ: 5.

Метод решения задач путем дополнительных построений

Основным методом решения задач, в которых фигурируют многоугольники (чаще всего – четырехугольники), является разбиение многоугольника на треугольники для того, чтобы можно было использовать обычную технику решения треугольников.

Отметим несколько стандартных приемов разбиения четырехугольника на треугольники.

1. В трапеции бывает полезно провести через одну из ее вершин прямую, параллельную противоположной боковой стороне.

2. Если в условии задачи говорится о диагоналях трапеции, то стандартным будет дополнительное построение, состоящее в проведении через одну из ее вершин прямой, параллельной диагонали.

3. В трапеции бывает полезно опустить из вершин верхнего основания перпендикуляры на нижнее основание.

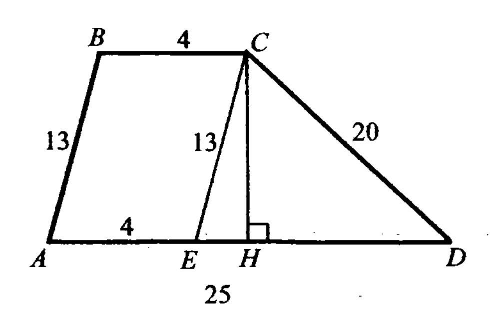
4. В трапеции можно продолжить боковые стороны до пересечения и рассмотреть полученный треугольник.

5. Если в условии задачи фигурирует середина одной или нескольких сторон четырехугольника, то стоит добавить середины каких-нибудь других сторон или диагоналей и рассмотреть средние линии соответствующих треугольников.

Покажем, как работают эти приемы, на конкретных задачах.

2.12. Длины параллельных сторон трапеции равны 25 и 4, а длины непараллельных сторон – 20 и 13. Найдите высоту трапеции.

Решение:



1) Построим $CE \parallel AB$.

$ABCE$ - параллелограмм, $CE = 13$.

2) ΔCED: $ED = AD - AE = 25 - 4 = 21$

По формуле Герона:

$$S_{\Delta CED} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{27 \cdot 6 \cdot 14 \cdot 7} = \sqrt{7^2 \cdot 2^2 \cdot 3^4} =$$
$$= 7 \cdot 2 \cdot 9 = 126$$

С другой стороны, $S_{\Delta CED} = \frac{1}{2} CH \cdot ED = \frac{1}{2} h \cdot 21$.

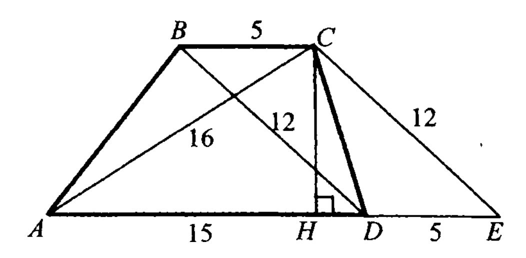
3) Используя метод площадей, получим:

$$\frac{1}{2}h\cdot 21=126 \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{2}=6 \quad \Rightarrow \quad h=12.$$

Ответ: 12.

2.13. В трапеции основания 5 и 15, а диагонали 12 и 16. Найдите площадь трапеции.

Решение:



1) Построим $CE \parallel BD$.

$BCED$ - параллелограмм; $CE=12$.

2) По формуле Герона:

$$S_{\Delta ACE}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{24\cdot 4\cdot 8\cdot 12}=\sqrt{8^2\cdot 4^2\cdot 3^2}=$$

$$=8\cdot 4\cdot 3=96$$

3) $S_{\Delta ACE}=\frac{1}{2}AE\cdot CH=\frac{1}{2}(AD+DE)\cdot CH=\frac{AD+BC}{2}\cdot CH$

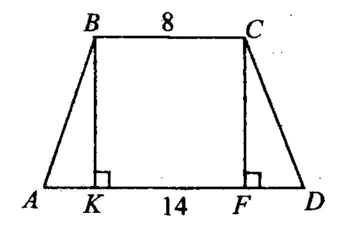
$$S_{ABCD}=\frac{BC+AD}{2}\cdot CH$$

Значит, $S_{ABCD}=96$

Ответ: 96.

2.14. Определите боковые стороны равнобедренной трапеции, если ее основания и площадь равны соответственно 8, 14 и 44.

Решение:



Построим $BK \perp AD$ и $CF \perp AD$.

Проекции боковых сторон равнобедренной трапеции равны, следовательно:

$$AK = FD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{14-8}{2} = 3.$$

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BK$$

$$\frac{8+14}{2} \cdot BK = 44 \quad \Rightarrow \quad 11BK = 44 \quad \Rightarrow \quad BK = 4$$

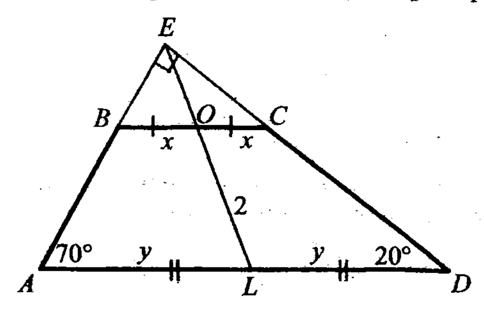
ΔABK: $AK = 3$, $BK = 4$, тогда гипотенуза $AB = 5$ (египетский треугольник)

Ответ: 5.

2.15. В трапеции углы при одном из оснований имеют величины $20°$ и $70°$, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 2. Найдите длины оснований трапеции, если длина средней линии равна 4.

Решение:

Точка E - пересечение боковых сторон трапеции AB и CD.



1) ΔAED - прямоугольный, так как $\angle E = 180° - (\angle A + \angle D) = 90°$.

$EL = AL = LD = y$ (по свойству медианы, проведенной из вершины прямого угла)

2) ΔBEC - прямоугольный; $EO = BO = CO = x$.

3) Составим систему уравнений:

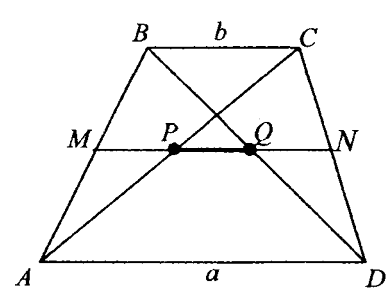
$$\begin{cases} \dfrac{BC + AD}{2} = 4 \\ EO + OL = EL \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x + 2y}{2} = 4 \\ x + 2 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$BC = 2x = 2$ и $AD = 2y = 6$

Ответ: 2 и 6.

2.16. Даны основания трапеции a и b $(a > b)$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

Решение:



P - середина AC; Q - середина BD. Продолжим отрезок PQ до пересечения боковых сторон трапеции в точках M и N.

1) ΔABC: MP - средняя линия треугольника; $MP = \dfrac{b}{2}$.

2) ΔBCD: QN - средняя линия треугольника; $QN = \dfrac{b}{2}$.

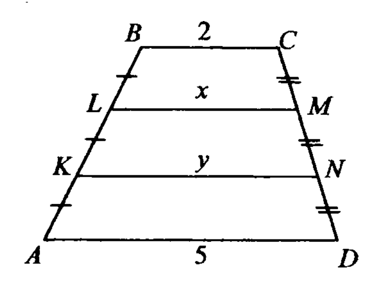
3) MN - средняя линия трапеции $ABCD$, то есть $MN = \dfrac{a+b}{2}$.

4) Тогда $PQ = MN - MP - QN = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{b}{2} - \dfrac{b}{2} = \dfrac{a-b}{2}$.

Ответ: $\dfrac{a-b}{2}$.

2.17. Боковая сторона трапеции разделена на три равные части и из точек деления проведены к другой стороне отрезки, параллельные основаниям. Найдите длины этих отрезков, если основания трапеции равны 2 и 5.

Решение:



Обозначим: $LM = x$, $KN = y$.

1) Трапеция $KBCN$: $LM = \dfrac{BC + KN}{2}$ - средняя линия.

2) Трапеция $ALMD$: $KN = \dfrac{LM + AD}{2}$ - средняя линия.

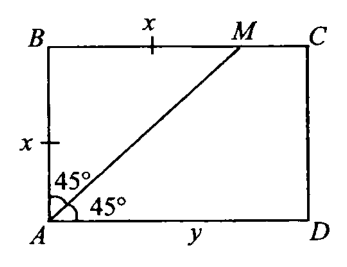
3) Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{2+y}{2} = x \\ \dfrac{x+5}{2} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x - 2y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Ответ: 3 и 4.

2.18. Найдите стороны прямоугольника $ABCD$, если отрезок AM, проведенный из вершины A к стороне BC, образует $\angle BAM = 45°$, а $MC - MB = 3$. Периметр прямоугольника равен 24.

Решение:



Обозначим: $AB = x$, $AD = y$.

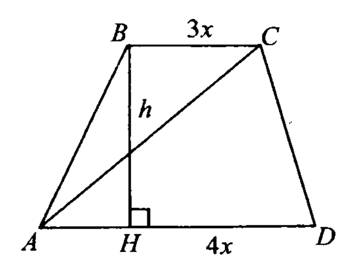
По условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2(x+y)=24 \\ (y-x)-x=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=12 \\ -2x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases}$$

Ответ: 3 и 9.

2.19. В трапеции $ABCD$ AD и BC - основания, отношение $AD:BC$ составляет $4:3$. Площадь трапеции равна 70. Найдите площадь треугольника ABC.

Решение:



Пусть: $BC = 3x$, $AD = 4x$, $BH = h$.

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH = \frac{3x + 4x}{2} \cdot h = \frac{7xh}{2}$$

$$\frac{7xh}{2} = 70 \quad \Rightarrow \quad xh = 20$$

Тогда: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot BC = \frac{1}{2} h \cdot 3x = \frac{3}{2} x h = \frac{3}{2} \cdot 20 = 30$

Ответ: 30.

2.20. Чему равны стороны прямоугольника, если его периметр 74 *дм*, а площадь 3 $м^2$?

Решение:

Обозначим стороны прямоугольника через x и y.

По условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} P = 2(x+y) \\ S = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x+y) = 74 \\ xy = 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 37 \\ xy = 300 \end{cases}$$

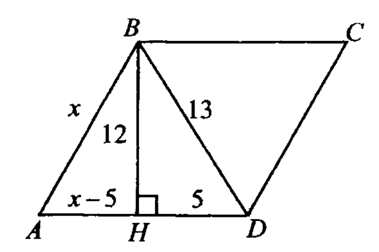
$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 1369 \\ -4xy = -1200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 169 \\ x+y = 37 \end{cases}$$

1) $\begin{cases} x-y = 13 \\ x+y = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 12 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y = -13 \\ x+y = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 25 \end{cases}$

Ответ: 12 *дм* и 25 *дм*.

2.21. Найдите площадь ромба, если его высота 12, а меньшая диагональ 13.

Решение:



Обозначим сторону ромба $AB = x$.

ΔBHD: $HD = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{169-144} = 5$ (по т. Пифагора).

ΔAHB: $AH^2 + BH^2 = AB^2$

$(x-5)^2 + 12^2 = x^2$

$x^2 - 10x + 25 + 144 = x^2$

$10x = 169$

$x = 16{,}9$

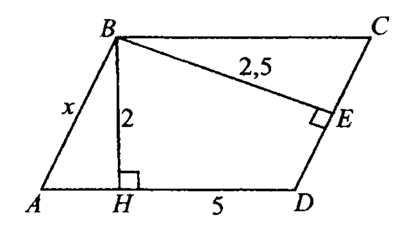
$$S_{ABCD} = BH \cdot AD = 12 \cdot \frac{169}{10} = 202,8$$

Ответ: 202,8.

Метод площадей в геометрических задачах

2.22. Большая сторона параллелограмма равна 5, а высоты 2 и 2,5. Найдите вторую сторону параллелограмма.

Решение:



Обозначим сторону параллелограмма $AB = x$.

$S_{ABCD} = BH \cdot AD = 2 \cdot 5 = 10$

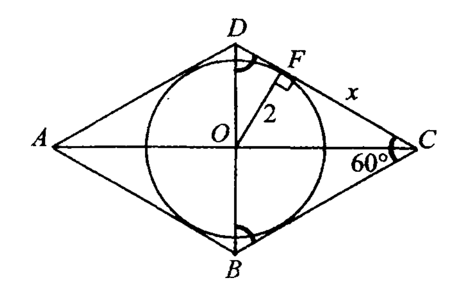
$S_{ABCD} = BE \cdot CD = 2,5x$

$2,5x = 10 \quad \Rightarrow \quad x = 4$

Ответ: 4.

2.23. В ромб, который делится своей диагональю на два равносторонних треугольника, вписана окружность с радиусом 2. Найдите сторону ромба.

Решение:



Пусть $CD = x$ - искомая сторона ромба.

$$S_{\Delta DBC} = \frac{1}{2}CD^2 \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

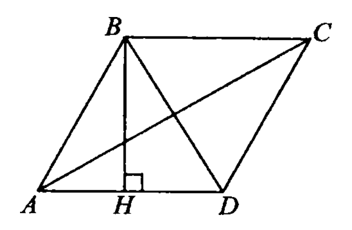
$$S_{\Delta DBC} = 2S_{\Delta ODC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot OF \cdot CD = 2x$$

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 2x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

2.24. Высота и диагонали ромба относятся как $12:15:20$, а его периметр равен 100. Найдите площадь ромба.

Решение:



1) $AB = P_{ABCD} : 4 = 25$

2) Обозначим коэффициент пропорциональности через x, тогда: $AC = 20x$, $BD = 15x$, $BH = 12x$.

3) $S_{ABCD} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{20x \cdot 15x}{2} = 150x^2$

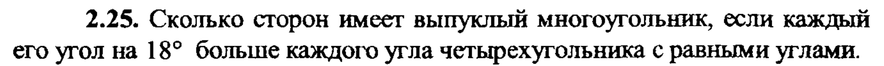
$S_{ABCD} = BH \cdot AD = 12x \cdot 25$

$150x^2 = 12x \cdot 25$; $6x = 12$; $x = 2$.

$BH = 24$

4) $S_{ABCD} = BH \cdot AD = 24 \cdot 25 = \frac{24 \cdot 100}{4} = 600$

Ответ: 600.



2.25. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если каждый его угол на $18°$ больше каждого угла четырехугольника с равными углами.

Решение:

Обозначим число сторон выпуклого многоугольника за n.

Сумма внутренних углов n-угольника равна: $180°(n-2)$.

Углы квадрата (четырехугольника с равными углами) равны $90°$.

Зная, что все углы n-угольника на $18°$ больше $90°$, составим уравнение:

$180°(n-2)=(90°+18°)n$

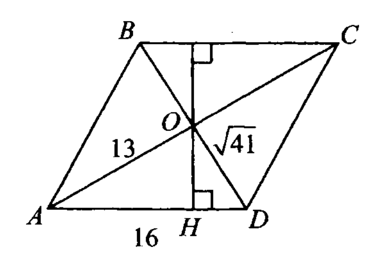
$72°\cdot n=360°$

$n=5$ - число сторон выпуклого многоугольника.

Ответ: 5.

2.26. В параллелограмме $ABCD$ $BD=2\sqrt{41}$, $AC=26$, $AD=16$. Через O - точку пересечения диагоналей параллелограмма проведена прямая, перпендикулярная стороне BC. Найдите отрезки, на которые эта прямая разделила сторону AD.

Решение:



Обозначим $AH=x$, тогда $HD=16-x$.

ΔAOH: $OH^2=AO^2-AH^2=169-x^2$

ΔDOH: $OH^2=OD^2-HD^2=41-(16-x)^2$

$169-x^2=41-(16-x)^2$

$32x=384 \quad\Rightarrow\quad x=12$

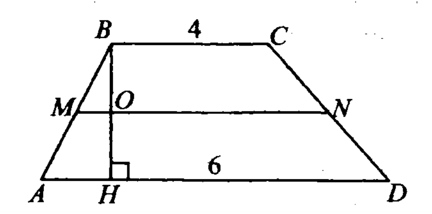
$AH = 12$ и $HD = 4$

Ответ: 12 и 4.

Метод вспомогательного элемента в геометрических задачах

2.27. Средняя линия трапеции с основаниями 4 и 6 разбивает трапецию на две фигуры. Найдите отношение площадей этих фигур.

Решение:



Средняя линия: $MN = \dfrac{BC + AD}{2} = 5$.

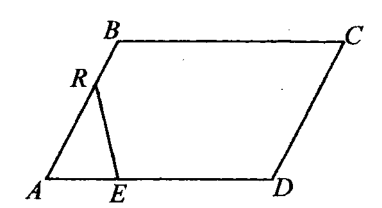
Введем вспомогательный элемент – отрезок $BO = HO = h$.

$$\frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}} = \frac{\dfrac{BC + MN}{2} \cdot h}{\dfrac{AD + MN}{2} \cdot h} = \frac{BC + MN}{AD + MN} = \frac{9}{11}$$

Ответ: $\dfrac{9}{11}$.

2.28. Через точки R и E, принадлежащие сторонам AB и AD параллелограмма $ABCD$ и такие, что $AR = \dfrac{2}{3} AB$, $AE = \dfrac{1}{3} AD$, проведена прямая. Найдите отношение площади параллелограмма к площади полученного треугольника.

Решение:



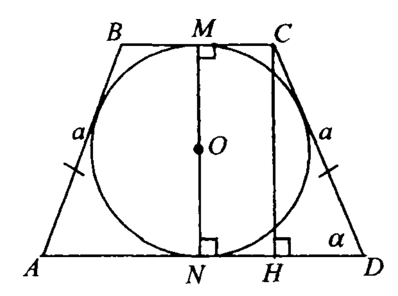
Вспомогательные элементы: $AB = a$, $AD = b$, $\angle A = \alpha$.

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\Delta ARE}} = \frac{AB \cdot AD \cdot \sin \angle A}{\frac{1}{2} AR \cdot AE \cdot \sin \angle A} = \frac{ab \sin \alpha}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} a \cdot \frac{1}{3} b \cdot \sin \alpha} = \frac{9}{1}$$

Ответ: 9:1.

2.29. В равнобедренной трапеции, описанной около круга, острый угол при основании равен α. Найдите отношение площади круга к площади трапеции.

Решение:



1) Введем вспомогательный элемент: $AB = CD = a$.

2) Высота трапеции: $CH = CD \cdot \sin \angle D = a \cdot \sin \alpha$.

Поскольку высота трапеции равна диаметру круга, то:

$S_{кр} = \pi \cdot r^2 = \frac{1}{4} \pi \cdot a^2 \cdot \sin^2 \alpha$.

3) Согласно свойству сторон описанного четырехугольника:

$BC + AD = AB + DC = 2a$.

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CH = \frac{2a}{2} \cdot a \cdot \sin \alpha = a^2 \cdot \sin \alpha.$$

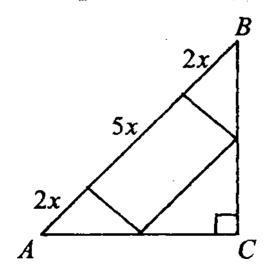
4) Искомое отношение: $\frac{S_{кр}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{4} \pi \cdot a^2 \cdot \sin^2 \alpha}{a^2 \cdot \sin \alpha} = \frac{1}{4} \pi \cdot \sin \alpha$.

Ответ: $0,25\pi \cdot \sin \alpha$.

2.30. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а две другие - на катетах. Чему равны стороны прямоугольника, если известно, что они относятся как $5:2$, а гипотенуза треугольника равна 45?

Решение:

Задача решается составлением уравнения.

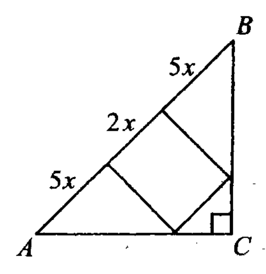


1 случай:

$2x+5x+2x=45$

$x=5$

Ответ: 10; 25.



2 случай:

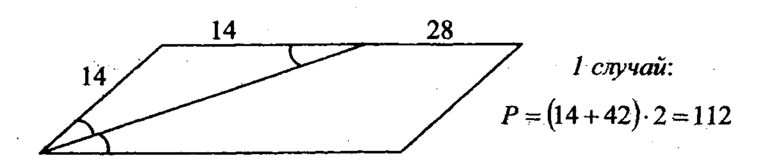
$5x+5x+2x=45$

$x=\frac{15}{4}=3{,}75$

Ответ: 7,5; 18,75.

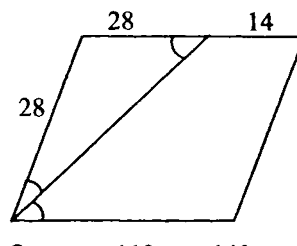
2.31. Биссектриса одного угла параллелограмма делит его сторону на 14 и 28. Найдите периметр параллелограмма.

Решение:



1 случай:

$P=(14+42)\cdot 2=112$



2 случай:
$P = (28 + 42) \cdot 2 = 140$

Ответ: 112 или 140.

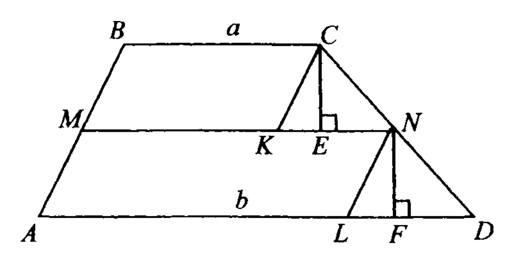
При решении более сложных геометрических задач одновременно используются несколько методов. Рассмотрим следующий пример.

2.32. Длины оснований трапеции a и b. Найдите длину отрезка прямой, параллельной основаниям трапеции и делящей ее на две равновеликие фигуры.

Решение:

По условию: $S_{MBCN} = S_{AMND}$.

Введем вспомогательный элемент: $MN = x$.



1) $\dfrac{a+x}{2} \cdot CE = \dfrac{b+x}{2} \cdot NF \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a+x}{b+x} = \dfrac{NF}{CE}$

2) Построим $CK \parallel MB$ и $NL \parallel AM$,

тогда $\Delta CKN \sim \Delta NLD$ (по двум углам).

3) Метод подобия:

$$\frac{KN}{LD} = \frac{CE}{NF} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-a}{b-x} = \frac{CE}{NF} \quad \Rightarrow \quad \frac{NF}{CE} = \frac{b-x}{x-a}$$

4) Метод уравнивания:

$$\frac{a+x}{b+x}=\frac{b-x}{x-a}$$

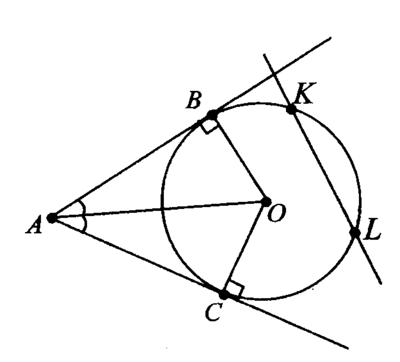
$$x^2-a^2=b^2-x^2$$

$$2x^2=a^2+b^2 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

§3. ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

Основные сведения



OC, OB - радиусы окружности

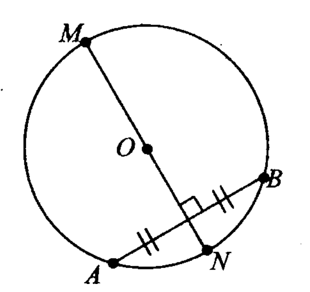
AB, AC - касательные

$OB \perp AB$, $OC \perp AC$

$AB = AC$, $\angle BAO = \angle CAO$

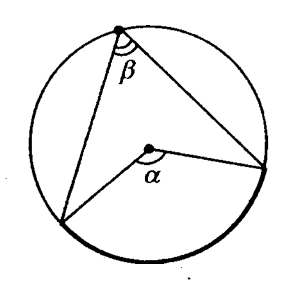
отрезок KL - хорда

прямая KL - секущая



Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, проходит через ее середину.

Обратно: если диаметр проходит через середину хорды, то он ей перпендикулярен.

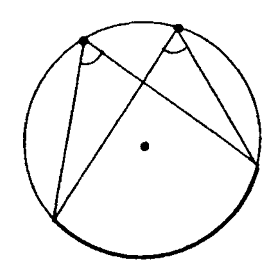


α - центральный угол

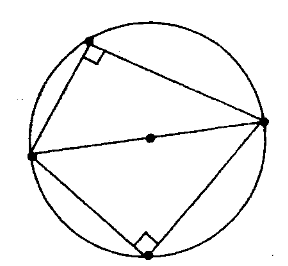
β - вписанный угол

Вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу:

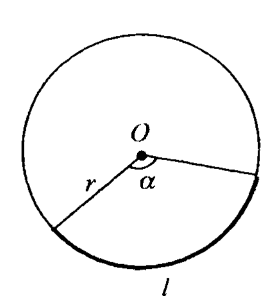
$$\beta = \frac{\alpha}{2}.$$



Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.



Все вписанные углы, опирающиеся на диаметр, прямые.



Длина дуги: $l = \alpha \cdot r$ (угол α в радианах)

$l = \dfrac{\pi \cdot r}{180} \cdot \alpha$ (угол α в градусах)

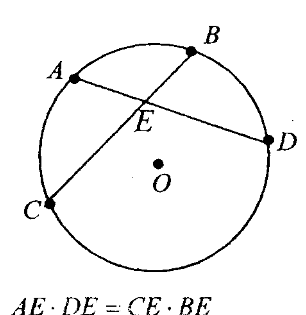
Длина окружности: $C = 2\pi \cdot r$

Площадь круга: $S = \pi \cdot r^2$

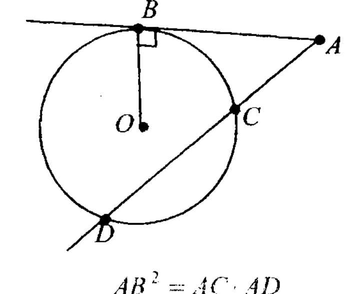
Метод поэтапного решения задач с использованием различных теорем

Рассмотрим несколько теорем, достаточно часто применяющихся при решении различных задач.

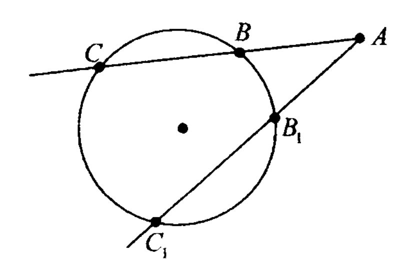
1. Пропорциональные линии в круге.



$AE \cdot DE = CE \cdot BE$



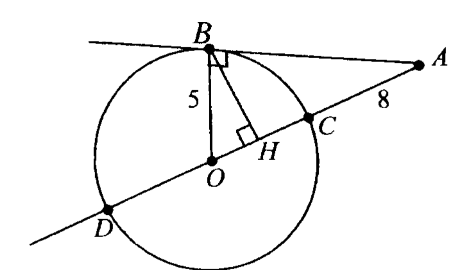
$AB^2 = AC \cdot AD$



$AB \cdot AC = AB_1 \cdot AC_1$

3.1. Из точки A, удаленной от окружности на 8, проведена касательная к окружности. Найдите расстояние от точки касания до прямой, проходящей через точку A и центр окружности, если радиус равен 5.

Решение:



1) $AB^2 = AC \cdot AD \quad \Rightarrow \quad AB^2 = 8 \cdot 18 \quad \Rightarrow \quad AB = 12$

2) Из ΔOBA:

$OB^2 = AO \cdot OH$

$25 = 13 \cdot OH \quad \Rightarrow \quad OH = \dfrac{25}{13}$

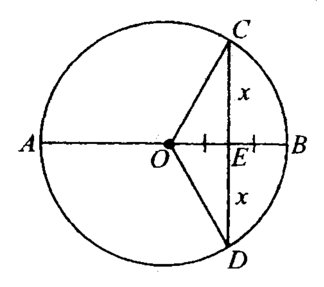
3) $BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{25 - \left(\dfrac{25}{13}\right)^2} = 5\sqrt{1 - \left(\dfrac{5}{13}\right)^2} =$

$= 5\sqrt{\left(1 - \dfrac{5}{13}\right)\left(1 + \dfrac{5}{13}\right)} = 5\sqrt{\dfrac{8}{13} \cdot \dfrac{18}{13}} = \dfrac{5 \cdot 12}{13} = 4\dfrac{8}{13}$

Ответ: $4\dfrac{8}{13}$.

3.2. В окружности проведена хорда, перпендикулярная радиусу и проходящая через его середину. Найдите эту хорду, если диаметр окружности равен 8.

Решение:



ΔOCD - равнобедренный. Обозначим: $CE = ED = x$

$AE \cdot EB = CE \cdot ED$

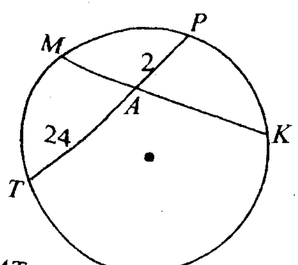
$6 \cdot 2 = x \cdot x$

$x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad CD = 4\sqrt{3}$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

3.3. Хорды MK и PT пересекаются в точке A. Найдите длину хорды MK, если $AP = 2$, $AT = 24$, $AM : KA = 3 : 4$.

Решение:



$AT \cdot AP = AM \cdot AK$. По условию: $AM : KA = 3 : 4$

$24 \cdot 2 = 3x \cdot 4x$

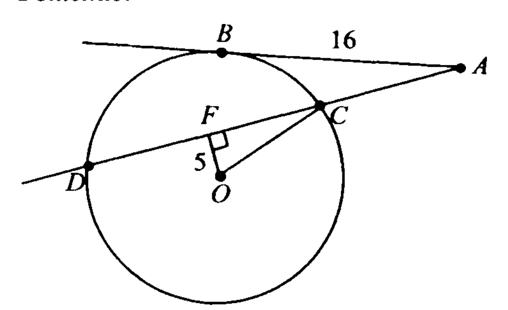
$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$AM = 6$, $AK = 8$, $MK = 14$

Ответ: 14.

3.4. Из точки A, не лежащей на окружности, проведены к ней касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16, а до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32. Найдите радиус окружности, если секущая удалена от ее центра на 5.

Решение:



1) $AB^2 = AC \cdot AD \quad \Rightarrow \quad 16^2 = AC \cdot 32 \quad \Rightarrow \quad AC = \dfrac{16^2}{32} = 8$

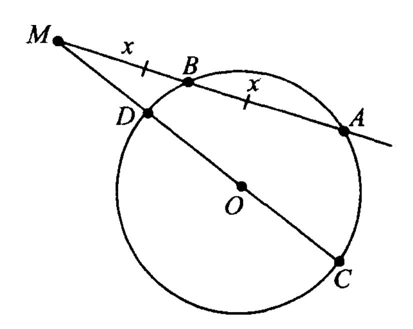
2) $FC = \dfrac{AD - AC}{2} = \dfrac{32-8}{2} = 12$

3) ΔOFC: $OC = \sqrt{OF^2 + FC^2} = \sqrt{25+144} = 13 \quad \Rightarrow \quad R = 13$

Ответ: 13.

3.5. Через точку M, удаленную от центра окружности на расстояние b, проведена секущая MA так, что она делится окружностью пополам: $MB = BA$. Определите длину секущей MA, если радиус окружности равен r.

Решение:



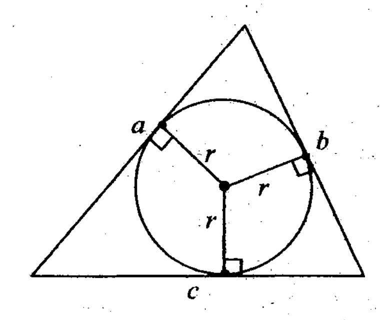
$MB \cdot MA = MD \cdot MC$

$$x \cdot 2x = (b-r)(b+r) \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = b^2 - r^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{b^2 - r^2}{2}}$$

$$MA = \sqrt{2(b^2 - r^2)}$$

Ответ: $\sqrt{2(b^2 - r^2)}$.

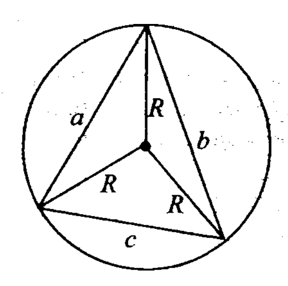
2. Рассмотрим формулы для радиусов описанной и вписанной окружностей треугольника.



$r = \frac{S}{p}$, где

S - площадь треугольника,

$p = \frac{a+b+c}{2}$

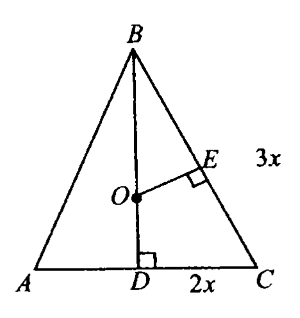


$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$

S - площадь треугольника

3.6. В равнобедренном треугольнике высота равна 20, а основание относится к боковой стороне как $4:3$. Найдите радиус вписанной окружности.

Решение:



Рассмотрим ΔBDC: $BC^2 = BD^2 + CD^2$ (т. Пифагора)

$9x^2 = 20^2 + 4x^2$

$5x^2 = 400 \quad \Rightarrow \quad x = 4\sqrt{5}$

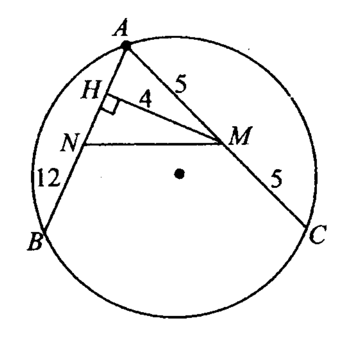
$BC = BA = 12\sqrt{5}$, $AC = 16\sqrt{5}$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2} BD \cdot AC}{\frac{1}{2}(AB + BC + AC)} = \frac{20 \cdot 16\sqrt{5}}{40\sqrt{5}} = 8$$

Ответ: 8.

3.7. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 10 и 12. Найдите радиус окружности, если расстояние от середины меньшей хорды до большей хорды равно 4.

Решение:



Построим MN - среднюю линию ΔABC.

$AH = 3$ (египетский треугольник).

$AH = \frac{1}{2}AN$, значит ΔAMN - равнобедренный.

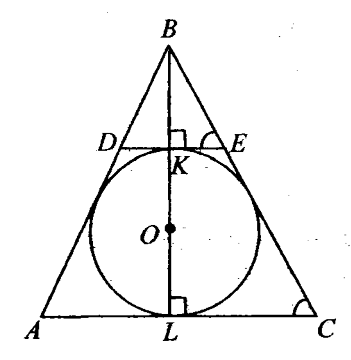
$MN = 5$, $BC = 10$

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4\sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4}} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 3}{4 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{25}{4}$$

Ответ: $\frac{25}{4}$.

3.8. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 и высотой 8, проведена касательная, параллельная основанию. Найдите длину отрезка данной касательной, заключенного между сторонами треугольника.

Решение:



1) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BL \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 48$

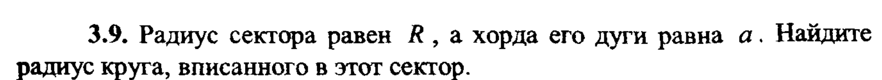
2) По т. Пифагора: $BC = \sqrt{BL^2 + LC^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$.

3) $r = \frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3 \quad \Rightarrow \quad OK = OL = 3, \; KL = 6$

4) $\Delta BKE \sim \Delta BLC$ (по двум углам)

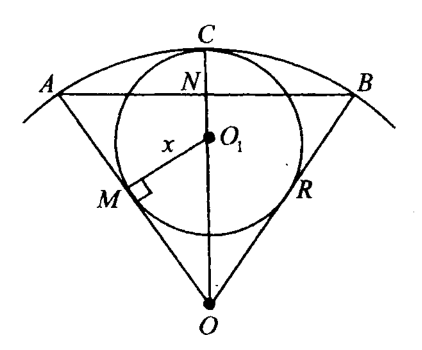
$$\frac{BK}{BL} = \frac{KE}{LC} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{8} = \frac{KE}{6} \quad \Rightarrow \quad KE = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad DE = 3$$

Ответ: 3.



3.9. Радиус сектора равен R, а хорда его дуги равна a. Найдите радиус круга, вписанного в этот сектор.

Решение:



1) ΔABO - равнобедренный, так как $AO = BO = R$.

Значит, $AN = BN = \dfrac{a}{2}$.

2) $\Delta OMO_1 \sim \Delta ONA$ (по двум углам)

$$\frac{O_1M}{AN} = \frac{OO_1}{AO} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{R-x}{R} \quad \Rightarrow \quad R \cdot x = \frac{a}{2}(R-x)$$

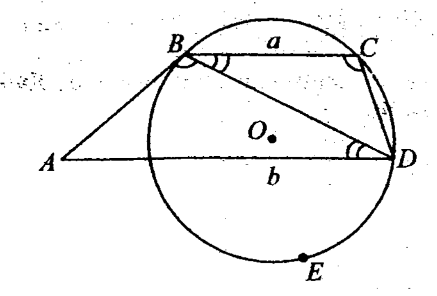
$$R \cdot x = \frac{aR}{2} - \frac{ax}{2} \quad \Rightarrow \quad x\left(R + \frac{a}{2}\right) = \frac{a \cdot R}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a \cdot R}{2R+a}$$

$$O_1M = \frac{aR}{2R+a}$$

Ответ: $\dfrac{aR}{2R+a}$.

3.10. Окружность проходит через вершины B, C и D трапеции $ABCD$ и касается стороны AB в точке B. Найдите длину диагонали BD, если длины оснований трапеции a и b.

Решение:



1) $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup BED$

$\angle BCD = \frac{1}{2} \cup BED$ $\Rightarrow$ $\angle ABD = \angle BCD$

2) $\angle ADB = \angle CBD$, поскольку $BC \parallel AD$, BD - секущая.

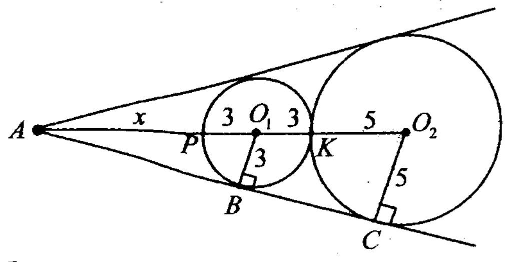
3) Значит, $\Delta ABD \sim \Delta DCB$ (по двум углам)

$$\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{b}{BD} = \frac{BD}{a} \Rightarrow BD = \sqrt{ab}$$

Ответ: $\sqrt{ab}$.

3.11. Две окружности радиусами 3 и 5 касаются друг друга внешним образом. Проведены две общие внешние касательные. Найдите расстояние от точки пересечения данных касательных до центра большей окружности.

Решение:



Обозначим: $AP = x$.

$\Delta AO_1B \sim \Delta AO_2C$ (по двум углам)

$$\frac{O_1B}{O_2C} = \frac{AO_1}{AO_2}$$

$$\frac{3}{5}=\frac{x+3}{x+11} \quad \Rightarrow \quad 3x+33=5x+15 \quad \Rightarrow \quad 2x=18 \quad \Rightarrow \quad x=9$$

$AP=9$

$AO_2 = AP+PK+KO_2 = 9+6+5=20$

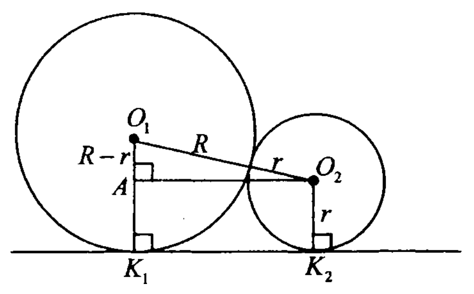
Ответ: 20.

Метод решения задач путем дополнительных построений

Основными этапами, причем достаточно стандартными, являются: выделение треугольников с вершинами в центрах рассматриваемых окружностей, выражение длин отрезков через известные и неизвестные величины, составление уравнения. Для составления уравнения, как правило, используют теорему Пифагора.

3.12. Окружности радиусом R и r касаются друг друга внешним образом. Найдите длину общей внешней касательной.

***Решение*:**



1) Построим $O_2A \parallel K_1K_2$. Тогда $K_1K_2O_2A$ - прямоугольник

$AK_1 = O_2K_2 = r$; $AO_2 = K_1K_2 = x$

2) ΔAO_1O_2: $O_1O_2^2 = AO_1^2 + AO_2^2$ (т. Пифагора)

$(R+r)^2 = (R-r)^2 + x^2$

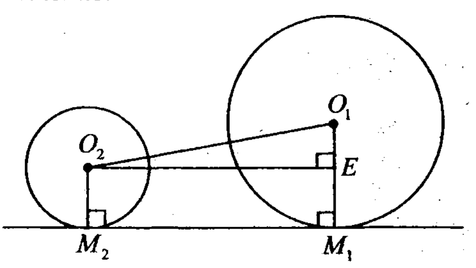
$R^2 + 2R\cdot r + r^2 = R^2 - 2R\cdot r + r^2 + x^2$

$x^2 = 4R\cdot r \quad \Rightarrow \quad K_1K_2 = 2\sqrt{R\cdot r}$

Ответ: $2\sqrt{R\cdot r}$.

3.13. Даны две окружности радиусами 12 и 7 с центрами в точках O_1 и O_2, касающиеся некоторой прямой в точках M_1 и M_2 и лежащие по одну сторону от данной прямой. Отношение длины отрезка M_1M_2 к длине отрезка O_1O_2 равно $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Найдите длину отрезка M_1M_2.

Решение:



1) Построим $O_2E \parallel M_1M_2$. Тогда $O_2EM_1M_2$ - прямоугольник.

$O_2E = M_1M_2$, $EM_1 = O_2M_2 = 7$

$O_1E = O_1M_1 - EM_1 = 5$

2) Обозначим: $O_1O_2 = x$, $O_2E = y$.

Используя т. Пифагора и условие задачи составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} O_1O_2^2 = O_2E^2 + O_1E^2 \\ \dfrac{M_1M_2}{O_1O_2} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 + 5^2 \\ \dfrac{y}{x} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 + 5^2 \\ x = \dfrac{\sqrt{5}y}{2} \end{cases}$$

$$\frac{5y^2}{4} = y^2 + 25$$

$$y^2 = 100$$

$y = 10$, $O_2E = 10$

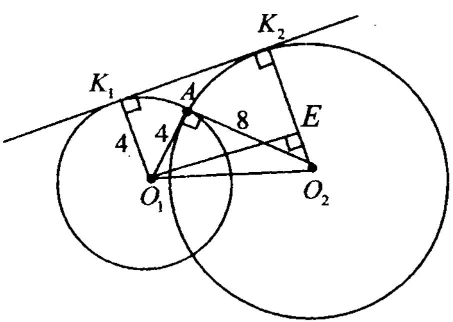
$x = 5\sqrt{5}$, $O_1O_2 = 5\sqrt{5}$

$M_1M_2 = O_2E = 10$

Ответ: 10.

3.14. Две окружности, радиусы которых 4 и 8, пересекаются под прямым углом. Определите длину их общей касательной.

Решение:



1) ΔO_1O_2A: $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 + O_2A^2} = \sqrt{16+64} = 4\sqrt{5}$

2) Построим $O_1E \parallel K_1K_2$. $K_1K_2EO_1$ - прямоугольник.

$K_2E = K_1O_1 = 4$

Найдем $K_1K_2 = EO_1$.

3) ΔO_1O_2E: $O_2E = O_2K_2 - K_2E = 8-4 = 4$

$O_1E = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{80-16} = 8$

$K_1K_2 = EO_1 = 8$

Ответ: 8.

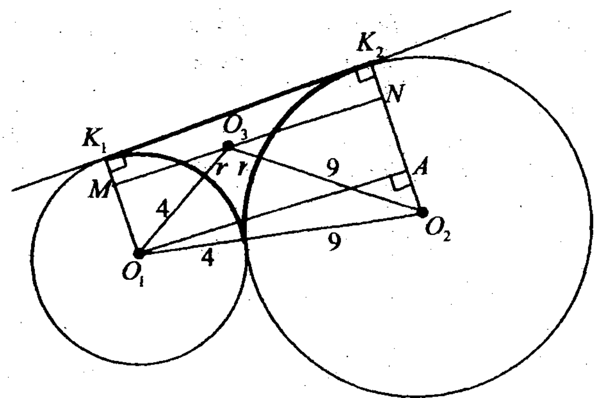
3.15. Две окружности радиусом 9 и 4 внешне касаются друг друга и прямой. Найдите радиус окружности, вписанной в образовавшийся криволинейный треугольник.

Решение:

1) O_3 - центр окружности, вписанной в криволинейный треугольник, с радиусом r

2) Построим $O_1A \parallel K_1K_2$.

$K_1K_2 = O_1A = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2A^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$



3) Построим через точку O_3 прямую $MN \parallel K_1K_2$.
$MN = K_1K_2 = 12$

4) Соединим центры O_1 с O_3 и O_2 с O_3.

ΔO_1MO_3: $MO_3^2 = O_1O_3^2 - O_1M^2$

$$MO_3^{\ 2} = (4+r)^2 - (4-r)^2 \quad \Rightarrow \quad MO_3 = 4\sqrt{r}$$

ΔO_2NO_3: $NO_3^2 = O_2O_3^2 - O_2N^2$

$$NO_3^{\ 2} = (9+r)^2 - (9-r)^2 \quad \Rightarrow \quad NO_3 = 6\sqrt{r}$$

5) $MN = MO_3 + NO_3$

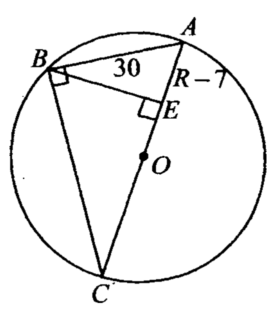
$$4\sqrt{r} + 6\sqrt{r} = 12 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{r} = \frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{36}{25}$$

Ответ: $\frac{36}{25}$.

Алгебраические методы решения геометрических задач

3.16. Из точки окружности проведены диаметр и хорда. Длина хорды равна 30, а ее проекция на диаметр меньше радиуса окружности на 7. Найдите радиус окружности.

Решение:



По теореме о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике:

$AB^2 = AE \cdot AC$

$30^2 = (R-7) \cdot 2R$

$2R^2 - 14R - 900 = 0$

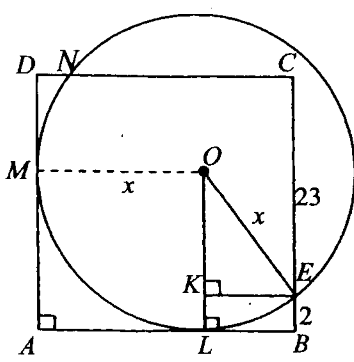
$R^2 - 7R - 450 = 0$

$R = 25$

Ответ: 25.

3.17. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других его сторон на отрезки, равные 2 и 23. Найдите радиус окружности.

Решение:



$KL = BE = 2 \quad \Rightarrow \quad AB = CB = 25$

Обозначим: $OE = x$.

Рассмотрим ΔOKE - прямоугольный.

$OE = x$; $OK = OL - KL = x - 2$; $KE = LB = AB - AL = 25 - x$

По теореме Пифагора: $OE^2 = OK^2 + KE^2$

$x^2 = (x-2)^2 + (25-x)^2$

$x^2 = x^2 - 4x + 4 + 625 - 50x + x^2$

$x^2 - 54x + 629 = 0$

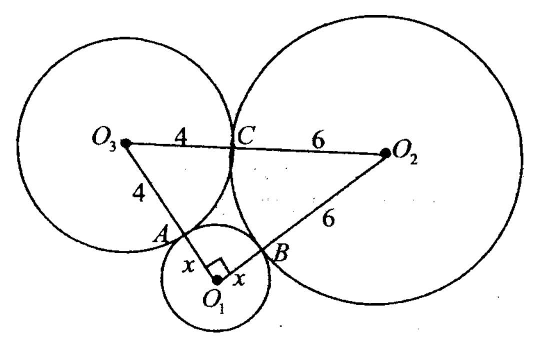
$x_1 = 17$

$x_2 = 37$ (не подходит по условию задачи, в этом случае $AL > AB$).

Ответ: 17.

3.18. Три окружности попарно касаются друг друга. Отрезки, соединяющие их центры, образуют прямоугольный треугольник. Найдите радиус меньшей окружности, если радиусы двух других равны 6 и 4.

Решение:



Обозначим: $O_1B = x$.

Тогда: $O_1O_2 = O_1B + BO_2 = x + 6$;

$O_1O_3 = O_1A + AO_3 = x + 4$;

$O_2O_3 = O_2C + CO_3 = 4 + 6 = 10$.

Из $\Delta O_1O_2O_3$ по т. Пифагора составим и решим уравнение:

$O_2O_3^2 = O_1O_3^2 + O_1O_2^2$

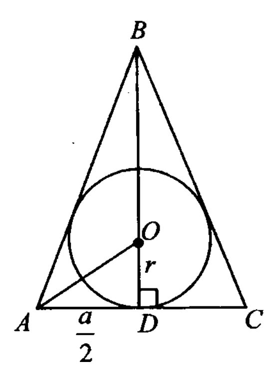
$10^2 = (x+4)^2 + (x+6)^2$

$x^2 + 10x - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2, \; O_1B = 2$

Ответ: 2

3.19. В равнобедренный треугольник с основанием a вписана окружность радиусом r. Определите периметр треугольника.

Решение:



Обозначим: $\angle BAC = \alpha$. $\angle BAO = \angle OAC = \dfrac{\alpha}{2}$

ΔOAD: $tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{OD}{AD} = \dfrac{r}{\frac{a}{2}} = \dfrac{2r}{a}$.

Тогда $tg\alpha = \dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\cdot\frac{2r}{a}}{1-\frac{4r^2}{a^2}} = \dfrac{4a\cdot r}{a^2-4r^2}$.

ΔBAD: $BD = AD\cdot tg\alpha = \dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{4a\cdot r}{a^2-4r^2} = \dfrac{2a^2\cdot r}{a^2-4r^2}$

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AC\cdot BD = \dfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{2a^2\cdot r}{a^2-4r^2} = \dfrac{a^3\cdot r}{a^2-4r^2}$; $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}p\cdot r$

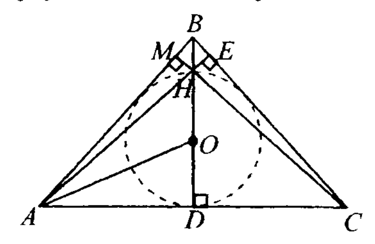
$\dfrac{a^3\cdot r}{a^2-4r^2} = \dfrac{1}{2}p\cdot r \Rightarrow 2a^3\cdot r = p\cdot r\cdot\left(a^2-4r^2\right) \Rightarrow p = \dfrac{2a^3}{a^2-4r^2}$

Ответ: $\dfrac{2a^3}{a^2-4r^2}$.

3.20. Найдите косинус угла при основании равнобедренного треугольника, зная, что точка пересечения его высот лежит на вписанной в треугольник окружности.

Решение:

По условию задачи точка пересечения высот лежит внутри треугольника, поэтому $\angle B < 90°$.



Обозначим: $\angle BAD = \alpha$, $OD = r$.

Тогда: $\angle OAD = \frac{\alpha}{2}$, $\angle EAC = 90° - \alpha$.

Рассмотрим ΔADO: $AD = OD \cdot ctg\angle OAD = r \cdot ctg\frac{\alpha}{2}$.

Рассмотрим ΔADH: $AD = DH \cdot ctg\angle HAD = 2r \cdot ctg(90° - \alpha)$.

Имеем: $r \cdot ctg\frac{\alpha}{2} = 2r \cdot ctg(90° - \alpha)$

$$ctg\frac{\alpha}{2} = 2tg\alpha \quad \Rightarrow \quad ctg\frac{\alpha}{2} = 2\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{tg\frac{\alpha}{2}} = \frac{4tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$1 - tg^2\frac{\alpha}{2} = 4tg^2\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{4}{5} : \frac{6}{5} = \frac{2}{3}$$

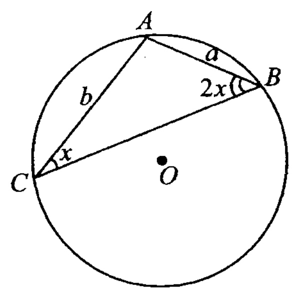
Ответ: $\frac{2}{3}$.

3.21. В окружности проведены две хорды $AB = a$ и $AC = b$. Длина дуги AC вдвое больше длины дуги AB. Найдите радиус окружности.

Решение:

Проведем BC.

Вспомогательный элемент: $\angle ACB = x$. Тогда $\angle ABC = 2x$.



1) По теореме синусов: $\dfrac{a}{\sin x} = \dfrac{b}{\sin 2x}$

$$\frac{a}{\sin x} = \frac{b}{2\sin x \cdot \cos x} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{b}{2\cos x} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{b}{2a}$$

2) С другой стороны: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4a^2}} = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2a}$$

3) $R = \dfrac{a}{2\sin x} = \dfrac{a \cdot 2a}{2\sqrt{4a^2 - b^2}} = \dfrac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$

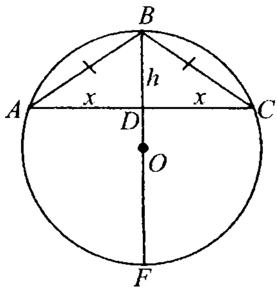
Ответ: $\dfrac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$.

3.22. В окружность радиусом r вписан равнобедренный треугольник, у которого сумма длин основания и высоты равна диаметру окружности. Найдите высоту треугольника.

Решение:

Возьмем в качестве вспомогательного элемента отрезок $AD = x$.

Используя свойство пересекающихся хорд и условие задачи, составим и решим систему уравнений:



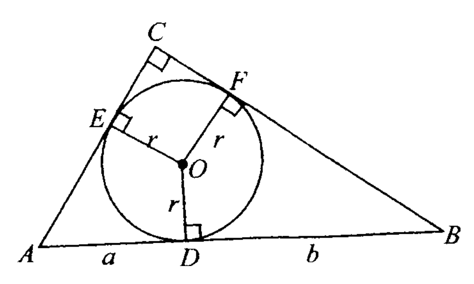
$$\begin{cases} AD\cdot DC = BD\cdot DF \\ AC+BD=BF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = h(2r-h) \\ 2x+h=2r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2r=2x+h \\ x^2 = h(2x+h-h) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2r=2x+h \\ x=2h \end{cases} \Rightarrow \quad 2r = 2\cdot(2h)+h \quad \Rightarrow \quad h=\frac{2}{5}r$$

Ответ: $h=\frac{2}{5}r$.

3.23. Найдите площадь прямоугольного треугольника, гипотенуза которого делится точкой касания вписанной окружности на отрезки a и b.

Решение:



Обозначим через r - радиус вписанной окружности.

ΔABC: $AB = AD + DB = a+b$;

$AC = AE + EC = a + r$;

$BC = BF + FC = b + r$.

По т. Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$(a+b)^2=(a+r)^2+(b+r)^2$$

$$a^2+2ab+b^2=a^2+2ar+r^2+b^2+2br+r^2$$

$$2ab=2r^2+2r(a+b)$$

$$ab=r^2+r(a+b)$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}(AB+AC+BC)r=\frac{1}{2}(a+b+a+r+b+r)r=$$

$$=(a+b+r)r=r^2+(a+b)r=ab$$

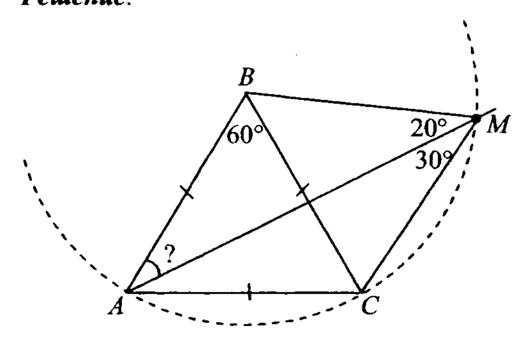
Ответ: ab.

Метод «вспомогательной окружности»

Одним из интересных элементарно-геометрических методов является метод «вспомогательной окружности». Обычно данный метод характеризуется в решении следующими оборотами: «Заметим, что точки X, Y,.. лежат на одной окружности…» или «Проведем окружность через точки X, Y,..». Приведем несколько примеров.

3.24. Дан ΔABC - равносторонний. Из точки A проведен луч и на нем взята точка M так, что $\angle BMA=20°$, $\angle AMC=30°$. Найдите $\angle BAM$.

Решение:



Построим окружность с центром в точке B и радиусом AB. Она пройдет через точки A и C.

$\angle ABC=60°$ (так как ΔABC - равносторонний);

$\angle AMC = 30^\circ$ (по условию).

Тогда $\angle ABC$ можно интерпретировать как центральный угол, опирающийся на дугу AC, а $\angle AMC$ - как вписанный угол, опирающийся на ту же дугу AC.

Значит, точки A, C и M лежат на одной окружности и $AB = BC = BM$.

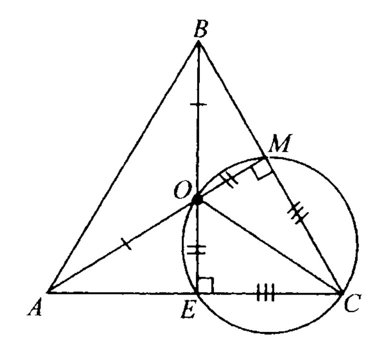
Следовательно, ΔABM - равнобедренный.

Значит, $\angle BAM = \angle BMA = 20^\circ$.

Ответ: 20°.

3.25. Медианы AM и BE треугольника ABC пересекаются в точке O. Точки O, M, E и C лежат на одной окружности. Найдите AB, если $BE = AM = 3$.

Решение:



1) $AO = OB$, $OE = OM$, $\angle AOE = \angle BOM$ $\Rightarrow$ $\Delta AOE = \Delta BOM$

Тогда $AE = BM$, а значит и $EC = CM$.

2) $\Delta COE = \Delta COM$ (по трем сторонам)

3) Обозначим $\angle OEC = \angle OMC = \alpha$.

Тогда $\cup OMC = \cup OEC = 2\alpha$,

а в сумме эти две дуги составляют окружность.

Значит, $4\alpha = 360^\circ \Rightarrow \angle OEC = \angle OMC = 90^\circ$.

Следовательно, ΔABC - равносторонний, поскольку в нем две медианы одновременно являются высотами.

4) Обозначим $AB = x$, тогда $AE = \frac{x}{2}$.

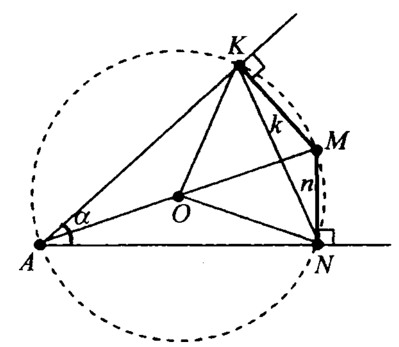
ΔABE: $AB^2 = BE^2 + AE^2$ (т. Пифагора)

$x^2 = 9 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow 3x^2 = 36 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$, $AB = 2\sqrt{3}$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

3.26. Внутри острого угла, равного α, взята точка M, удаленная от его сторон на расстояния k и n. Найдите расстояние от вершины угла до точки M.

Решение:



1) $\angle KMN = 180° - \alpha$.

В ΔKMN по теореме косинусов:

$KN^2 = KM^2 + MN^2 - 2KM \cdot MN \cos \angle KMN =$

$= k^2 + n^2 - 2k \cdot n \cos(180° - \alpha) = k^2 + n^2 + 2k \cdot n \cos \alpha$

2) Через точки A, K, M, и N можно провести окружность.

AM - диаметр; O - центр вспомогательной окружности.

3) Обозначим: $OK = ON = R$.

$\angle KON = 2\alpha$ (как центральный угол)

В ΔOKN по теореме косинусов:

$KN^2 = OK^2 + ON^2 - 2OK \cdot ON \cos \angle KON =$

$$= R^2 + R^2 - 2R^2\cos 2\alpha = 2R^2(1-\cos 2\alpha) = 4R^2\sin^2\alpha$$

4) Применяем метод уравнивания:

$$k^2 + n^2 + 2k\cdot n\cos\alpha = 4R^2\sin^2\alpha \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\sqrt{k^2+n^2+2k\cdot n\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$$

5) $AM = 2R = \dfrac{\sqrt{k^2+n^2+2k\cdot n\cos\alpha}}{\sin\alpha}$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{k^2+n^2+2k\cdot n\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

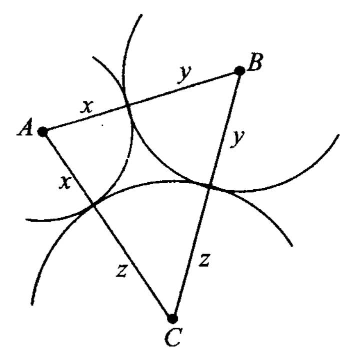
Геометрические задачи, распадающиеся на несколько случаев

3.27. Найдите радиусы трех попарно касающихся окружностей с центрами в вершинах треугольника со сторонами 8, 9, 10.

Решение:

1 случай: Три окружности касаются друг друга внешним образом.

$AB = 8$, $BC = 10$, $AC = 9$.



$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x + z = 9 \\ y + z = 10 \end{cases}$$

$2(x+y+z) = 27$

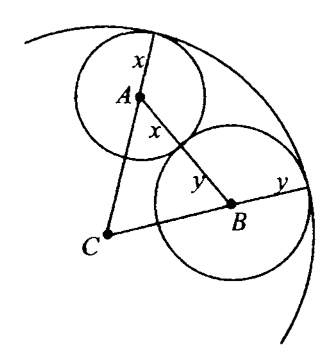
$x + y + z = 13{,}5$

$z = 5{,}5$, $y = 4{,}5$, $x = 3{,}5$

Ответ: $(3{,}5;\ 4{,}5;\ 5{,}5)$.

2 случай: Две окружности касаются внутренним образом.

а) Пусть радиус окружности с центром в точке C равен z.



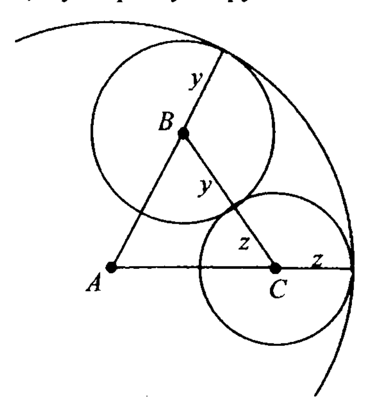
$$\begin{cases} x+y=8 \\ z-x=9 \\ z-y=10 \end{cases}$$

$2z=27$

$z=13{,}5$, $x=4{,}5$, $y=3{,}5$.

Ответ: $(4{,}5;\ 3{,}5;\ 13{,}5)$.

б) Пусть радиус окружности с центром в точке A равен x.



$$\begin{cases} y+z=10 \\ x-y=8 \\ x-z=9 \end{cases}$$

$2x=27$;

$x=13{,}5$, $y=5{,}5$, $z=4{,}5$.

Ответ: $(13{,}5;\ 5{,}5;\ 4{,}5)$.

в) Пусть радиус окружности с центром в точке B равен y.

Ответ: $(5{,}5;\ 13{,}5;\ 3{,}5)$.

ГЛАВА IX. СТЕРЕОМЕТРИЯ

Опыт преподавания геометрии в школе, а также опыт проведения выпускных экзаменов показывает, что многие учащиеся не могут самостоятельно выбирать необходимые знания для решения стереометрических задач. К решению каждой задачи учащиеся приступают как к чему-то новому, не видят того общего, что уже встречалось в ранее решенных задачах.

В данной главе остановимся на одном из возможных путей формирования умений учащихся решать стереометрические задачи. Сначала рассмотрим некоторые возможные приемы работы. А на заключительном этапе рассмотрим решение задач, способствующих осознанию и систематизации знаний (раздел, посвященный комбинациям фигур).

Рассматривая методы решения геометрических задач, можно заметить, что подавляющее большинство стереометрических задач решается сведением их к задачам по планиметрии.

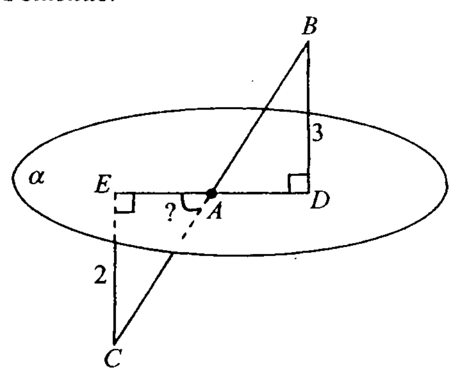
Ниже приведены краткие решения ряда типичных задач по стереометрии, полезно их тщательно разобрать.

§1. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ И УГЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим несколько геометрических задач, для решения которых необходимо вычислить те или иные расстояния или углы в пространстве.

1.1. Отрезок длиной 10 пересекает плоскость, причем концы его находятся на расстоянии 3 и 2 от плоскости. Найдите угол между данным отрезком и плоскостью.

Решение:



Обозначим: $AC = x$, тогда $AB = 10 - x$.

$\Delta ACE \sim \Delta ABD$ (по двум углам)

$$\frac{EC}{BD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{x}{10-x} \Rightarrow 3x = 20 - 2x \Rightarrow x = 4$$

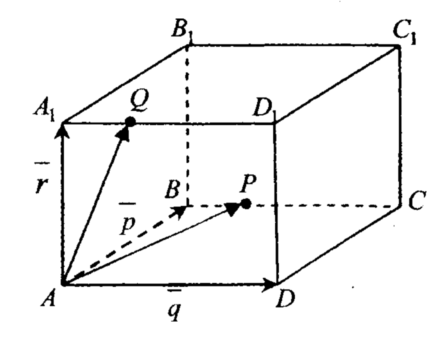
Следовательно, в ΔACE: $EC = 2$, $AC = 4$, $\angle E = 90^\circ$.

Значит, $\angle EAC = 30^\circ$ по свойству катета, лежащего против угла 30°.

Ответ: 30°.

1.2. Точки P и Q делят ребра BC и A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в отношении $1:2$, считая от точек B и A_1. Найдите $\angle PAQ$.

Решение:



Пусть $\overline{AB} = \bar{p}$, $\overline{AD} = \bar{q}$, $\overline{AA_1} = \bar{r}$ - базисные векторы.

Обозначим ребро куба через a.

По определению скалярного произведения векторов:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AQ}}{\left|\overline{AP}\right| \cdot \left|\overline{AQ}\right|}.$$

Найдем разложение векторов $\overline{AP}$ и $\overline{AQ}$ по базису $(\bar{p}; \bar{q}; \bar{r})$.

$$\overline{AP} = \bar{p} + \frac{1}{3}\bar{q}; \quad \overline{AQ} = \bar{r} + \frac{1}{3}\bar{q}.$$

$$\left|\overline{AP}\right| = \left|\overline{AQ}\right| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{3} \quad \text{(по т. Пифагора)}$$

$$\cos\varphi = \frac{\left(\bar{p}+\frac{1}{3}\bar{q}\right)\left(\bar{r}+\frac{1}{3}\bar{q}\right)}{\frac{10a^2}{9}} = \frac{\overline{p\cdot r}+\frac{1}{3}\bar{q}\cdot\bar{r}+\frac{1}{3}\overline{p\cdot q}+\frac{1}{9}\bar{q}^2}{\frac{10a^2}{9}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \overline{p\cdot r}=\bar{q}\cdot\bar{r}=\overline{p\cdot q}=0 \\ \text{т.к. эти три вектора} \\ \text{ортогональны} \end{array} \right| = \frac{\frac{1}{9}q^2}{\frac{10a^2}{9}} = \left| \text{ т.к. } q^2=a^2 \right| = 0{,}1$$

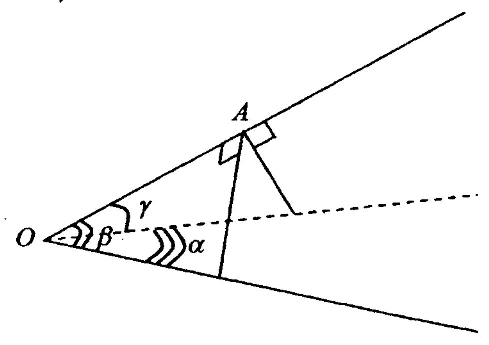
$\angle PAQ = \arccos\ (0{,}1)$

Ответ: $\arccos\ (0{,}1)$.

Плоские углы трехгранного угла находятся в определенной зависимости с двугранными его углами. Имеет место равенство:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cdot\cos\gamma + \sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos\angle A,$$

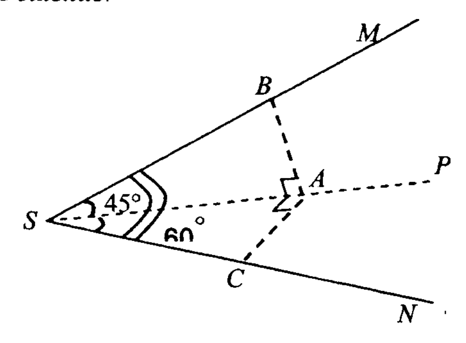
где α, β, γ - плоские углы при вершине трехгранного угла, $\angle A$ - величина двугранного угла при ребре OA. Аналогичные формулы можно записать для $\cos\beta$ и $\cos\gamma$.



Приведенная формула (формула косинусов) позволяет по трем плоским углам найти двугранные углы при ребрах трехгранного угла и, наоборот, зная все двугранные углы, найти все плоские углы при вершине трехгранного угла.

1.3. В трехгранном угле два плоских угла по $45°$, третий плоский угол $60°$. Найдите двугранный угол, противолежащий третьему углу.

Решение:



$$\cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\gamma + \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos\angle A$$

$$\alpha = 60°, \quad \beta = \gamma = 45°$$

$$\cos 60° = \cos 45° \cdot \cos 45° + \sin 45° \cdot \sin 45° \cdot \cos\angle A$$

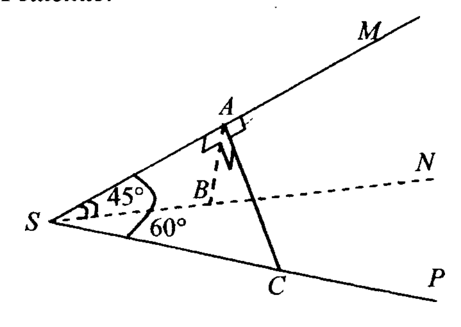
$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\angle A$$

$$\cos\angle A = 0 \quad \Rightarrow \quad \angle A = 90°$$

Ответ: $90°$.

1.4. Величины двух плоских углов трехгранного угла равны $60°$ и $45°$. Найдите величину третьего плоского угла, если противолежащий ему двугранный угол - прямой.

Решение:



$$\cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\gamma + \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos\angle A$$

$\beta = 60°$, $\gamma = 45°$, $\angle A = 90°$, то есть $\cos\angle A = 0$

Требуется найти $\angle NSP = \alpha$.

$\cos\alpha = \cos 60° \cdot \cos 45° + \sin 60° \cdot \sin 45° \cdot 0$

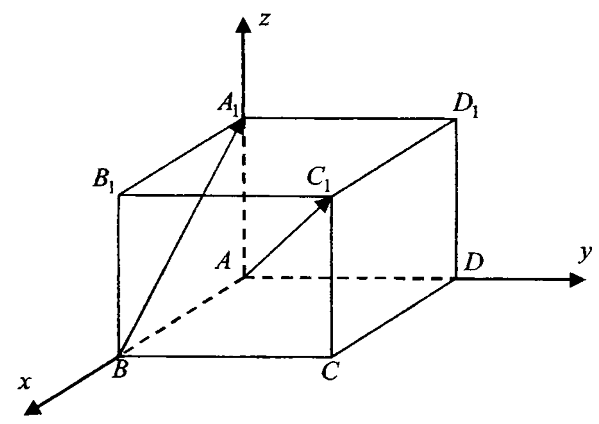
$\cos\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

1.5. Найдите угол между диагональю куба BA_1 и скрещивающейся диагональю куба AC_1, если ребро куба равно a.

Решение:

Введем систему координат, как показано на рисунке.



Тогда вершины куба будут иметь координаты:

$A_1(0;\ 0;\ a)$; $A(0;\ 0;\ 0)$; $B(a;\ 0;\ 0)$; $C_1(a;\ a;\ a)$.

$\overline{BA_1}(-a;\ 0;\ a)$, $\overline{AC_1}(a;\ a;\ a)$

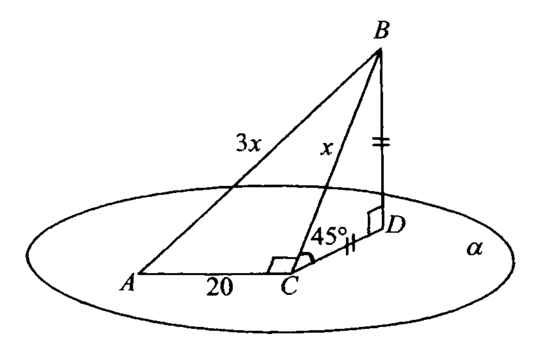
$$\cos\varphi = \frac{\overline{BA_1} \cdot \overline{AC_1}}{\left|\overline{BA_1}\right| \cdot \left|\overline{AC_1}\right|} = \frac{-a^2 + a^2}{\left|\overline{BA_1}\right| \cdot \left|\overline{AC_1}\right|} = 0$$

Значит, эти диагонали перпендикулярны.

Ответ: $90°$.

1.6. Треугольник ABC с прямым углом ACB и катетом AC, принадлежащим плоскости α, образует с этой плоскостью двугранный угол, равный $45°$. Найдите расстояние от вершины B до плоскости α, если $AC = 20$ и $AB : BC = 3:1$.

Решение:



Обозначим: $BC = x$, тогда $AB = 3x$.

1) В ΔABC:

$9x^2 - x^2 = 400$ (т. Пифагора)

$x = 5\sqrt{2}$, то есть $BC = 5\sqrt{2}$

2) В ΔBCD: $\angle BCD = \angle CBD = 45°$

$CD^2 + BD^2 = BC^2$ (т. Пифагора)

$2BD^2 = 50 \Rightarrow BD = 5$

Ответ: 5.

1.7. В треугольнике ABC: $AC = BC = 10$, $\angle B = 30°$. Прямая BD перпендикулярна плоскости треугольника, $BD = 5$. Чему равно расстояние от точки D до прямой AC?

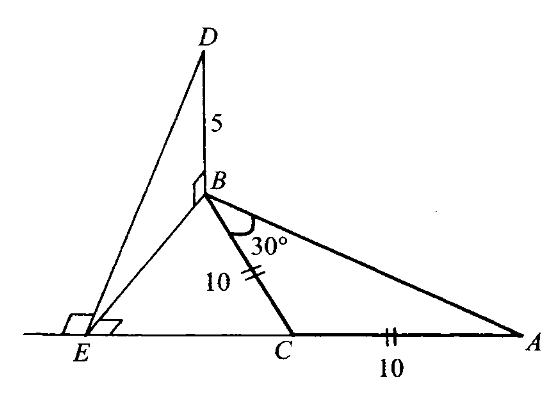
Решение:

Найдем расстояние от точки D до прямой AC, то есть DE.

1) ΔABC - равнобедренный, следовательно, $\angle BCA = 120°$.

2) ΔBCE - прямоугольный:

$\angle BCE = 180° - 120° = 60°$; $\angle CBE = 30°$.



$CE = \frac{1}{2}BC = 5$ (по свойству катета, лежащего против угла 30°)

$BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3}$

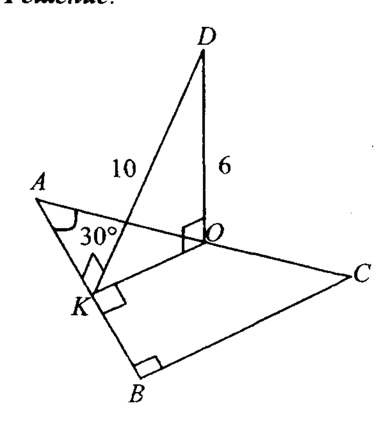
3) ΔDEB - прямоугольный:

$DE = \sqrt{DB^2 + BE^2} = \sqrt{75 + 25} = 10$.

Ответ: 10.

1.8. Из центра круга, описанного около прямоугольного треугольника с острым углом в 30°, восстановлен к его плоскости перпендикуляр, длина которого 6. Конец перпендикуляра, лежащий вне плоскости треугольника, удален от большего катета на 10. Найдите гипотенузу треугольника.

Решение:



1) ΔDOK - прямоугольный: $OK = \sqrt{DK^2 - DO^2} = 8$.

2) Из ΔABC:

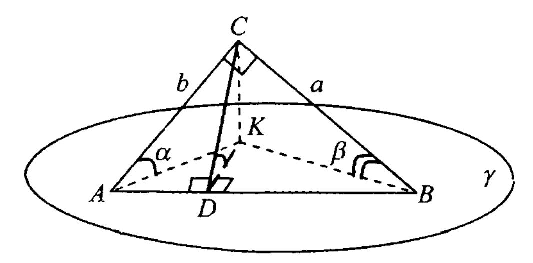
OK - средняя линия, $OK = \frac{1}{2}BC \quad \Rightarrow \quad BC = 2 \cdot OK = 16$

$AC = 2 \cdot BC = 32$ (свойство катета, лежащего против угла $30°$)

Ответ: 32.

1.9. Гипотенуза прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости γ. Катеты образуют с плоскостью углы α и β. Найдите угол между высотой треугольника и плоскостью γ.

Решение:



Обозначим: $AC = b$, $BC = a$.

В ΔACK: $\sin\alpha = \frac{CK}{b}$. В ΔBCK: $\sin\beta = \frac{CK}{a}$.

Тогда: $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \frac{CK^2}{b^2} + \frac{CK^2}{a^2} = CK^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}\right) =$

$= CK^2\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}\right) = \frac{CK^2 \cdot AB^2}{a^2b^2}$

Так как $CD = \frac{AC \cdot CB}{AB} = \frac{a \cdot b}{AB}$ (свойство высоты, опущенной на гипотенузу), получаем:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \frac{CK^2 \cdot AB^2}{a^2b^2} = \frac{CK^2}{CD^2} = \left(\frac{CK}{CD}\right)^2.$$

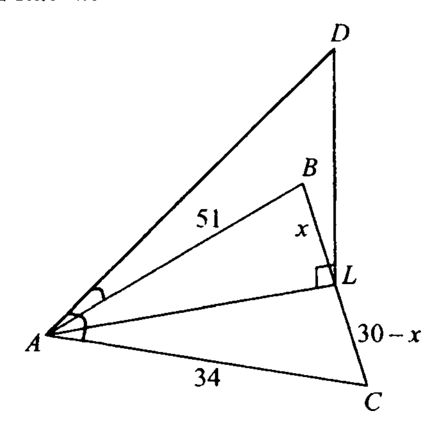
Следовательно, $\sin\angle CDK = \frac{CK}{CD} = \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}$.

$\angle CDK = \arcsin\left(\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}\right)$

Ответ: $\arcsin\left(\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}\right)$.

1.10. Из вершины A треугольника ABC проведена вне его плоскости прямая AD, образующая со сторонами AB и AC равные острые углы. На какие части проекция прямой AD на плоскость треугольника делит сторону BC, если $AB = 51$, $AC = 34$, $BC = 30$?

Решение:



AL - проекция прямой AD на плоскость треугольника и биссектриса $\angle BAC$. Тогда по свойству биссектрисы треугольника делить противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам получаем:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}.$$

Обозначим $BL = x$, тогда $LC = 30 - x$.

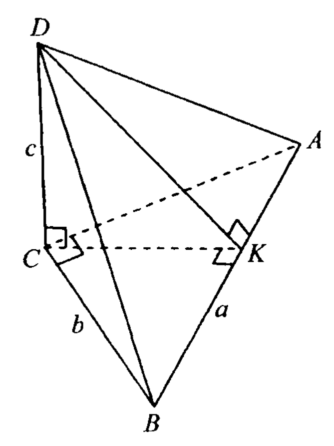
$$\frac{51}{34} = \frac{x}{30 - x} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2} = \frac{x}{30 - x} \quad \Rightarrow \quad 2x = 90 - 3x \quad \Rightarrow \quad x = 18$$

$BL = 18$, $LC = 12$

Ответ: 18 и 12.

1.11. Из вершины прямого угла C ΔABC восстановлен перпендикуляр CD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до гипотенузы треугольника, если $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$.

Решение:



Найдем DK.

1) ΔABC - прямоугольный.

$$\cos\angle B = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \sin\angle B = \sqrt{1-\cos^2\angle B} = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

2) ΔBCK - прямоугольный.

$$CK = b\cdot\sin\angle B = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-b^2}$$

3) ΔCDK - прямоугольный.

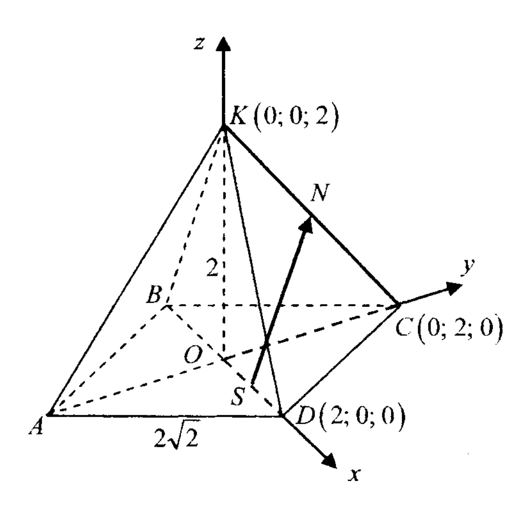
$$DK = \sqrt{DC^2+CK^2} = \sqrt{c^2+\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-b^2\right)} = \sqrt{b^2+c^2-\frac{b^4}{a^2}}$$

Ответ: $\sqrt{b^2+c^2-\dfrac{b^4}{a^2}}$.

Покажем на примере применение векторно-координатного метода для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми.

1.12. В правильной четырехугольной пирамиде известны длина стороны основания $2\sqrt{2}$ и длина высоты 2. Найдите расстояние между боковым ребром и скрещивающейся с ним диагональю основания.

Решение:



1) Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. Пусть SN - общий перпендикуляр прямых KC и BD.

$\overline{SN} = \overline{SD} + \overline{DC} + \overline{CN}$

2) Так как $\overline{SD}$ коллинеарен $\overline{BD}$, существует некоторое число x, такое что $\overline{SD} = x \cdot \overline{BD}$. Аналогично $\overline{CN} = y \cdot \overline{CK}$.

Тогда: $\overline{SN} = x \cdot \overline{BD} + \overline{DC} + y \cdot \overline{CK}$.

3) Найдем координаты вершин пирамиды и координаты векторов:

$B(-2; 0; 0)$, $C(0; 2; 0)$, $D(2; 0; 0)$, $K(0; 0; 2)$;

$\overline{BD}(4; 0; 0)$, $\overline{DC}(-2; 2; 0)$, $\overline{CK}(0; -2; 2)$.

Тогда $\overline{SN} = (4x - 2; 2 - 2y; 2y)$

4) Учитывая, что $\overline{SN} \perp \overline{BD}$ и $\overline{SN} \perp \overline{CK}$, получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}\overline{SN}\cdot\overline{BD}=0\\ \overline{SN}\cdot\overline{CK}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(4x-2)\cdot 4=0\\ (2-2y)\cdot(-2)+2y\cdot 2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4x-2=0\\ 8y-4=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=0,5\\ y=0,5\end{cases}$$

5) Получаем, что вектор $\overline{SN}$ имеет следующие координаты:

$\overline{SN}=(0;1;1)$.

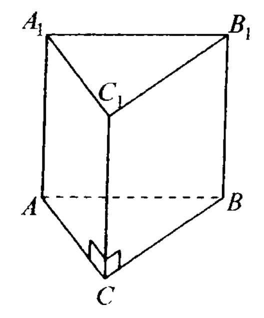
Тогда $\left|\overline{SN}\right|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

§2. ПРИЗМА

Прямая призма

Призма называется **прямой,** если все ее боковые ребра перпендикулярны основаниям.



$CC_1 = h$ - высота призмы

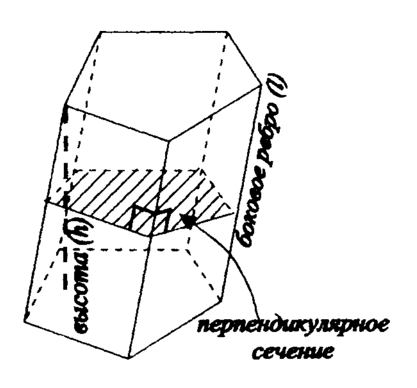
$S_{бок} = P_{осн} \cdot h$

$S_{полн} = S_{бок} + 2 \cdot S_{осн}$

$V = S_{осн.} \cdot h$

Призма называется **правильной,** если она прямая и ее основания – правильные многоугольники.

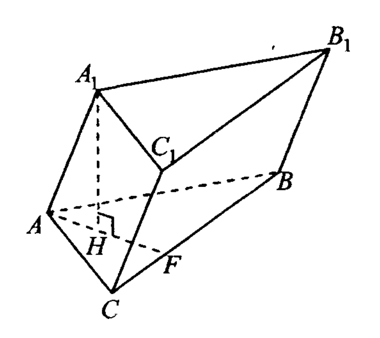
Наклонная призма



$S_{бок} = P_{сеч} \cdot l$

$S_{полн} = S_{бок} + 2 \cdot S_{осн}$

$V = S_{сеч} \cdot l$



A_1H - высота призмы

$\angle A_1AB = \angle A_1AC$

AF - биссектриса $\angle A$

$V = S_{осн} \cdot h$

Если в наклонной призме боковое ребро (AA_1) составляет равные углы со сторонами основания, образующими угол (A), то основание высоты (A_1H) лежит на биссектрисе (AF) угла (A).

Параллелепипед

Параллелепипедом называется призма, в основании которой лежит параллелограмм.

Прямым параллелепипедом называется параллелепипед, у которого четыре боковые грани – прямоугольники.

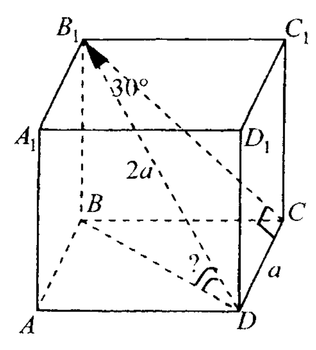
Прямоугольным параллелепипедом называется прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник.

Кубом называется прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны.

Одним из удачных приемов, значительно облегчающих решение многих стереометрических задач, является введение вспомогательных элементов изучаемой комбинации тел. В качестве вспомогательных элементов могут выступать отрезки, углы, площади и объемы. Иногда введение вспомогательного отрезка оказывается полезным при решении задач, в которых требуется найти некоторый угол. Продемонстрируем это на примерах.

2.1. Диагональ правильной четырехугольной призмы наклонена к боковой грани под углом $30°$. Вычислите угол наклона этой диагонали к основанию.

Решение:



Требуется найти $\angle BDB_1$.

1) В ΔCB_1D обозначим: $CD = a$ (вспомогательный элемент).

Тогда $B_1D = 2 \cdot CD = 2a$ как гипотенуза в прямоугольном треугольнике с углом $30°$

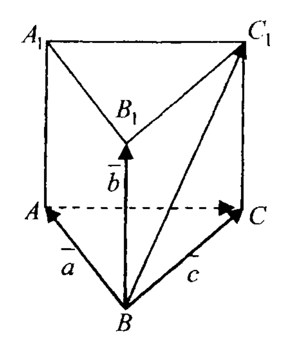
2) В ΔBB_1D: $BD = a\sqrt{2}$ (так как основание $ABCD$ - квадрат)

$$\cos\angle BDB_1 = \frac{BD}{B_1D} = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \angle BDB_1 = 45°$$

Ответ: $45°$.

2.2. Все ребра прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют равные длины. Найдите величину угла между BC_1 и AC.

Решение:



Обозначим: $\overline{BA} = \bar{a}$, $\overline{BB_1} = \bar{b}$, $\overline{BC} = \bar{c}$.

Пусть m - длина каждого из этих векторов.

По определению скалярного произведения векторов:

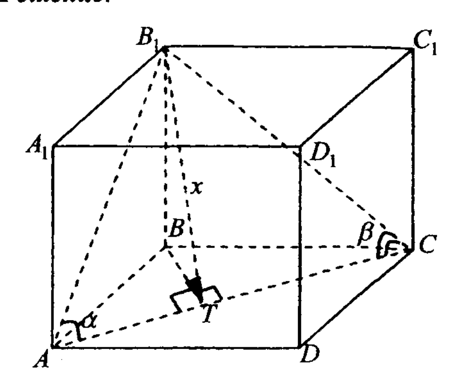
$$\cos\left(\overline{BC_1}, \overline{AC}\right)=\frac{\overline{BC_1}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{BC_1}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}=\frac{\left(\bar{b}+\bar{c}\right)\cdot\left(\bar{c}-\bar{a}\right)}{m\sqrt{2}\cdot m}=\frac{\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{c}^2-\bar{a}\cdot\bar{b}-\bar{a}\cdot\bar{c}}{m^2\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\bar{c}^2-\bar{a}\cdot\bar{c}}{m^2\sqrt{2}}=\frac{m^2-m^2\cos 60^\circ}{m^2\sqrt{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

2.3. Диагонали AB_1 и CB_1 двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ составляют с диагональю AC основания $ABCD$ углы, соответственно α и β. Найдите угол между плоскостью треугольника AB_1C и плоскостью основания.

Решение:



Обозначим: $B_1T=x$ (вспомогательный элемент).

1) В ΔATB_1: $ctg\alpha=\frac{AT}{B_1T}\quad\Rightarrow\quad AT=x\cdot ctg\alpha$.

В ΔCTB_1: $ctg\beta=\frac{TC}{B_1T}\quad\Rightarrow\quad TC=x\cdot ctg\beta$.

2) В ΔABC $\left(\angle ABC=90^\circ\right)$:

$$BT^2 = AT \cdot TC \quad \Rightarrow \quad BT = \sqrt{x\,ctg\alpha \cdot x\,ctg\beta} = x\sqrt{ctg\alpha \cdot ctg\beta}$$

3) В ΔB_1BT $(\angle B_1BT = 90°)$:

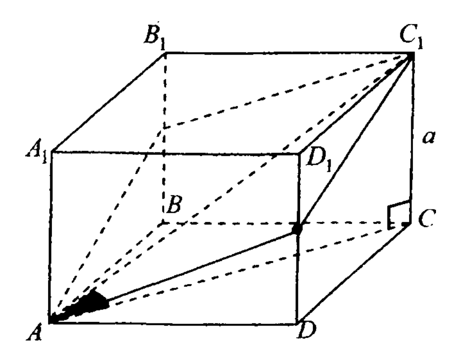
$$\cos\angle B_1TB = \frac{BT}{B_1T} = \frac{x\sqrt{ctg\alpha \cdot ctg\beta}}{x} = \sqrt{ctg\alpha \cdot ctg\beta}\ .$$

Значит, $\angle B_1TB = \arccos\sqrt{ctg\alpha \cdot ctg\beta}$

Ответ: $\arccos\sqrt{ctg\alpha \cdot ctg\beta}$.

2.4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершины A , C_1 и середину ребра D_1D проведено сечение. Найдите ребро куба, если площадь сечения равна $50\sqrt{6}$.

Решение:



Обозначим ребро: $C_1C = a$. Тогда $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = a\sqrt{2}$

В ΔC_1AC $(\angle C_1CA = 90°)$: $AC_1 = \sqrt{AC^2 + C_1C^2} = a\sqrt{3}$.

$$\cos\angle C_1AC = \frac{AC}{AC_1} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

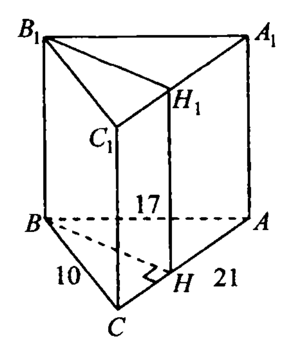
$S_{пр} = S_{сеч} \cdot \cos\varphi$, где $S_{пр}$ - площадь проекции сечения, в данной задаче площадь $ABCD$.

$$S_{пр} = 50\sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 100 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad a = 10,\ CC_1 = 10\ .$$

Ответ: 10.

2.5. В прямой треугольной призме стороны основания равны 10, 17 и 21, а высота призмы - 18. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и меньшую высоту основания.

Решение:



$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24\cdot 14\cdot 7\cdot 3} = 3\cdot 4\cdot 7 = 84$$

(*формула Герона*)

В треугольнике наименьшей является высота, проведенная к большей стороне. В нашем случае наименьшей высотой будет BH.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BH\cdot 21 \quad \Rightarrow \quad 84 = \frac{1}{2}BH\cdot 21 \quad \Rightarrow \quad BH = 8$$

$$S_{BB_1HH_1} = BB_1\cdot BH = 18\cdot 8 = 144$$

Ответ: 144.

2.6. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Плоскость, проведенная через одну из сторон нижнего основания и противолежащую сторону верхнего основания, образует с плоскостью основания угол $45°$. Полученное сечение имеет площадь равную Q. Определите боковую поверхность параллелепипеда.

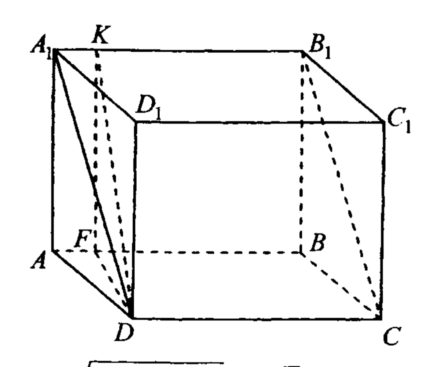
Решение:

По условию: $S_{DCB_1A_1} = Q$, $\angle FDK = 45°$.

Обозначим: $KF = x$.

ΔKFD - равнобедренный прямоугольный треугольник,

следовательно, $DF = x$.



$$KD=\sqrt{KF^2+FD^2}=x\sqrt{2}$$

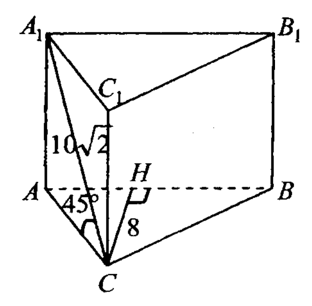
$$S_{сеч}=CD\cdot KD \quad\Rightarrow\quad CD=\frac{S_{сеч}}{KD}=\frac{Q}{x\sqrt{2}}$$

$$S_{бок}=P_{осн}\cdot h=4\cdot CD\cdot AA_1=4\cdot\frac{Q}{x\sqrt{2}}\cdot x=2Q\sqrt{2}$$

Ответ: $2Q\sqrt{2}$.

2.7. Основание прямой призмы – равнобедренный треугольник, в котором высота, проведенная к основанию, равна 8. Диагональ боковой грани, содержащей боковую сторону треугольника, равна $10\sqrt{2}$ и образует с плоскостью основания угол $45°$. Найдите боковую поверхность призмы.

Решение:



1) По условию $\angle A_1CA=\angle AA_1C=45°$.

Следовательно, ΔAA_1C - равнобедренный, прямоугольный треугольник $\left(\angle A_1AC=90°\right)$.

$A_1A^2 + AC^2 = A_1C^2$ (теорема Пифагора)

Тогда $AA_1 = AC = 10$.

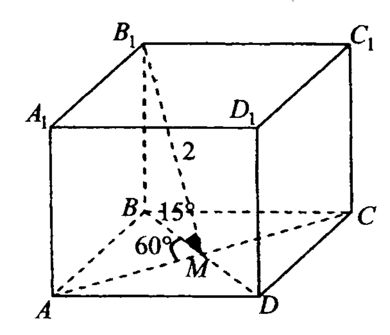
2) Из ΔABC: $AH = \sqrt{CA^2 - HC^2} = 6$

3) $S_{бок} = P_{осн} \cdot h = (10+10+12) \cdot 10 = 320$

Ответ: 320.

2.8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали основания AC и BD пересекаются в точке M, $\angle AMB = 60°$. Определите боковую поверхность параллелепипеда, если $B_1M = 2$, $\angle BMB_1 = 15°$.

Решение:



1) Из ΔBB_1M $(\angle B_1BM = 90°)$: $BM = B_1M \cdot \cos\angle B_1MB = 2\cos 15°$;

$BB_1 = B_1M \cdot \sin\angle B_1MB = 2\sin 15°$.

2) В равнобедренном ΔABM $\angle AMB = 60°$.

Следовательно, ΔABM - равносторонний и $AB = BM = 2\cos 15°$.

3) В ΔAMD: $AD^2 = AM^2 + MD^2 - 2AM \cdot MD\cos\angle AMD =$

$= 4\cos^2 15° + 4\cos^2 15° - 2 \cdot 4\cos^2 15° \cdot \cos 120° = 12\cos^2 15°$ (т. косинусов)

То есть $AD = 2\sqrt{3}\cos 15°$.

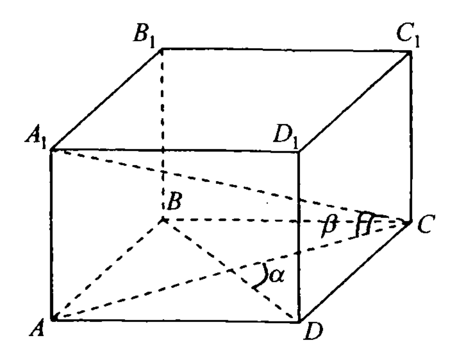
4) $S_{бок} = P_{осн} \cdot h = 2 \cdot \left(2\cos 15° + 2\sqrt{3}\cos 15°\right) \cdot 2\sin 15° =$

$= 4 \cdot 2 \cdot \cos 15° \cdot \sin 15° \cdot \left(1+\sqrt{3}\right) = 4\sin 30° \cdot \left(1+\sqrt{3}\right) = 2 \cdot \left(1+\sqrt{3}\right)$

Ответ: $2 \cdot \left(1+\sqrt{3}\right)$.

2.9. Угол между диагоналями основания прямоугольного параллелепипеда равен α. Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол β. Найдите высоту параллелепипеда, если его объем равен V.

Решение:



Требуется найти AA_1, пусть $AA_1 = x$.

1) В ΔA_1AC: $ctg\beta = \dfrac{AC}{AA_1} \Rightarrow AC = x \cdot ctg\beta$

2) $AC = BD$ (так как $ABCD$ - прямоугольник)

$$S_{осн} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} x^2 \cdot ctg^2\beta \cdot \sin\alpha$$

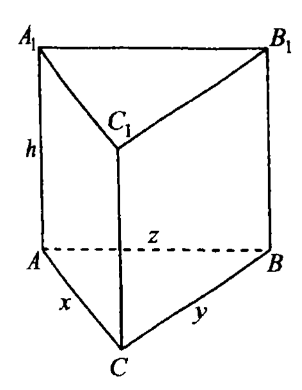
3) $V = S_{осн} \cdot h \Rightarrow V = \dfrac{1}{2} x^3 \cdot ctg^2\beta \cdot \sin\alpha \Rightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{2V}{ctg^2\beta \cdot \sin\alpha}}$

Ответ: $\sqrt[3]{\dfrac{2V}{ctg^2\beta \cdot \sin\alpha}}$.

2.10. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4, площади боковых граней 9, 10 и 17. Определите объем призмы.

Решение:

1) Обозначим: $AC = x$, $BC = y$, $AB = z$, $AA_1 = h$.



По условию: $\begin{cases} x \cdot h = 9 \\ y \cdot h = 10 \\ z \cdot h = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{h} \\ y = \dfrac{10}{h} \\ z = \dfrac{17}{h} \end{cases}$

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{h} + \frac{10}{h} + \frac{17}{h}\right) = \frac{18}{h}$$

$$S_{осн} = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} = \sqrt{\frac{18}{h} \cdot \frac{9}{h} \cdot \frac{8}{h} \cdot \frac{1}{h}} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 3}{h^2} = \frac{36}{h^2}$$

2) $4 = \dfrac{36}{h^2} \Rightarrow h = 3 \Rightarrow V = S_{осн} \cdot h = 4 \cdot 3 = 12$

Ответ: 12.

2.11. В прямом параллелепипеде стороны основания равны a и b и острый угол α. Большая диагональ основания равна меньшей диагонали параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда.

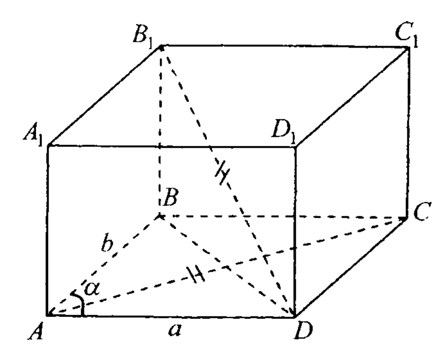
Решение:

По условию $B_1D = AC$.

1) В ΔABC по теореме косинусов:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC =$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$$



2) В ΔABD по теореме косинусов:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\angle BAD = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

3) ΔBB_1D - прямоугольный $\left(\angle DBB_1 = 90°\right)$

$BB_1^{\ 2} = B_1D^2 - BD^2 = AC^2 - BD^2 = 4a \cdot b \cdot \cos\alpha$

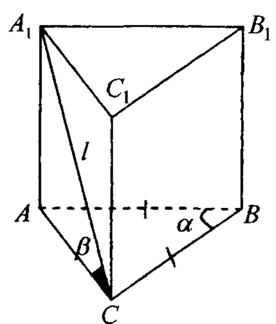
$BB_1 = 2\sqrt{a \cdot b \cdot \cos\alpha}$

4) $V = S_{осн} \cdot h = a \cdot b \cdot \sin\alpha \cdot \sqrt{a \cdot b \cdot \cos\alpha} = 2\sin\alpha\sqrt{a^3 \cdot b^3 \cdot \cos\alpha}$

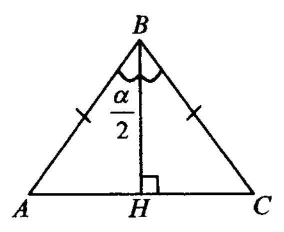
Ответ: $2\sin\alpha\sqrt{a^3 \cdot b^3 \cdot \cos\alpha}$.

2.12. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник с углом α при вершине. Диагональ грани, противоположной данному углу, равна l и составляет с плоскостью основания угол β. Найдите объем призмы.

Решение:



1) В ΔAA_1C: $AA_1 = h = l\sin\beta$; $AC = l\cos\beta$.



2) В ΔABC: $AH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}l\cos\beta$; $BH = \frac{1}{2}l\cos\beta \cdot ctg\frac{\alpha}{2}$.

$S_{\Delta ABC} = AH \cdot BH = \frac{1}{4}l^2\cos^2\beta \cdot ctg\frac{\alpha}{2}$

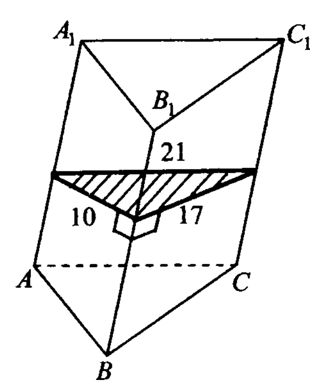
3) $V = S_{осн} \cdot h = \frac{1}{4}l^3\cos^2\beta \cdot \sin\beta \cdot ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{8}l^3\cos\beta \cdot \sin 2\beta \cdot ctg\frac{\alpha}{2}$

Ответ: $\frac{1}{8}l^3\cos\beta \cdot \sin 2\beta \cdot ctg\frac{\alpha}{2}$.

2.13. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами 10, 17 и 21, а боковое ребро 18. Найдите объем призмы.

Решение:

$S_{сеч} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = 84$

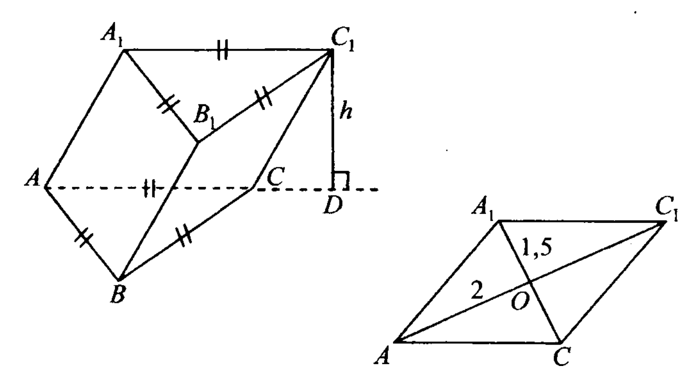


$V = S_{сеч} \cdot l = 84 \cdot 18 = 1\,512$

Ответ: 1 512.

2.14. В наклонной треугольной призме одна из боковых граней перпендикулярна к плоскости основания и представляет собой ромб, диагонали которого равны 3 и 4, основанием призмы служит равносторонний треугольник. Найдите объем призмы.

Решение:



1) $AA_1 = \sqrt{AO^2 + OA_1^2} = \sqrt{4 + 2,25} = 2,5$ - сторона ромба.

2) Площадь ромба AA_1C_1C можно определить по формулам:

$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3$ или $S = AA_1 \cdot h = 2,5 \cdot h$.

Приравняем два этих выражения (метод площадей) и определим высоту:

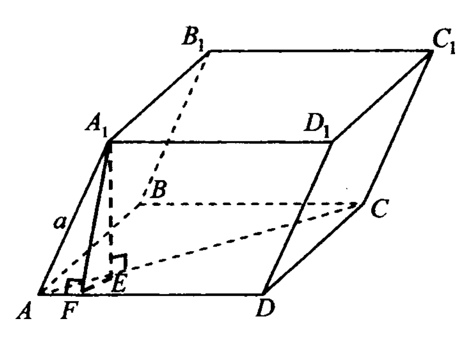
$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 2,5 \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = 2,4$ (высота призмы)

3) $V = S_{осн} \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{(2,5)^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2,4 = \frac{25\sqrt{3} \cdot 2,4}{4 \cdot 4} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$

Ответ: $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

2.15. В параллелепипеде все его грани – равные ромбы со сторонами a и острыми углами α. Определите объем параллелепипеда.

Решение:



$S_{осн} = a^2 \sin\alpha$. Построим $A_1E = h$, $A_1F \perp AD$

1) В ΔA_1AF: $AF = AA_1 \cos\alpha = a\cos\alpha$.

2) Диагональ ромба AC является биссектрисой угла A.

Следовательно, в ΔAFE: $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{AF}{AE} \Rightarrow AE = \frac{AF}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

3) В ΔAA_1E:

$$h = \sqrt{AA_1^2 - AE^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha} =$$

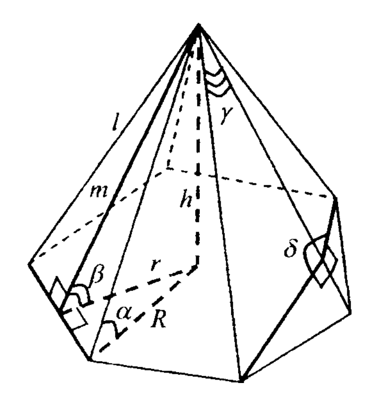
$$= \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha\right)} =$$

$$= \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2\sin\frac{3\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4} \cdot 2\cos\frac{3\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$$

4) $V = S_{осн} \cdot h = a^2 \sin\alpha \cdot \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = 2a^3 \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$

Ответ: $2a^3 \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$.

§3. ПИРАМИДА



Введем обозначения углов:

α - угол наклона ребра к плоскости основания;

β - двугранный угол при основании;

γ - плоский угол при вершине;

δ - двугранный угол при боковом ребре.

Введем обозначения длин линейных элементов пирамиды:

h - высота;

l - боковое ребро;

m - апофема;

r, R - радиусы вписанной в основание и описанной около основания окружностей соответственно.

Произвольная пирамида:	***Правильная пирамида:***
$S_{бок} = \sum_{i=1}^{n} S_i$, где S_i - площадь одной боковой грани $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$	$S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot m$, где P - периметр основания, m - апофема. $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$

Если все боковые ребра пирамиды образуют равные углы с основанием, то:

1) все боковые ребра равны;

2) около основания можно описать окружность;

3) высота пирамиды проходит через центр этой окружности.

Если все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под одним и тем же углом β, а высота проходит через некоторую точку O основания пирамиды, то:

1) высоты всех граней равны;

2) в основание пирамиды можно вписать окружность, причем центром окружности будет точка O;

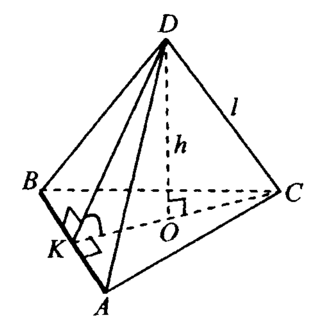
3) $S_{\text{осн}} = S_{\text{бок}} \cdot \cos\beta$.

Треугольная пирамида называется ***тетраэдром***.

Тетраэдр, все грани которого - правильные треугольники, называется правильным.

3.1. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды l, а высота h. Найдите двугранный угол при основании.

Решение:



Найдем $\angle DKO$.

1) В ΔDCO: $OC = \sqrt{DC^2 - DO^2} = \sqrt{l^2 - h^2}$

2) В ΔABC: $OC = \frac{2}{3}CK \quad \Rightarrow \quad CK = \frac{3}{2}OC = \frac{3}{2}\sqrt{l^2 - h^2}$;

$OK = \frac{1}{3} CK = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{2}$.

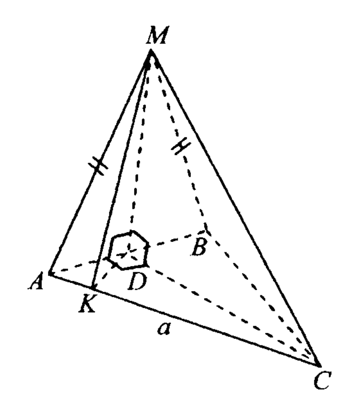
3) В ΔDKO: $tg \ \angle DKO = \frac{DO}{KO} = \frac{2h}{\sqrt{l^2 - h^2}}$

$\angle DKO = arctg \frac{2h}{\sqrt{l^2 - h^2}}$

Ответ: $arctg \frac{2h}{\sqrt{l^2 - h^2}}$.

3.2. Основанием пирамиды $MABC$ является равносторонний треугольник ABC со стороной a. Грань MAB - равнобедренный треугольник, плоскость которого перпендикулярна плоскости основания пирамиды, $MA = MB = \frac{a\sqrt{7}}{4}$. Найдите углы наклона боковых граней пирамиды к основанию.

Решение:



1) $\angle MDC = 90°$ - линейный угол двугранного угла $MABC$

2) $MK \perp AC$, $DK \perp AC$. Найдем линейный угол $\angle MKD$.

В ΔMAD: $MD = \sqrt{AM^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{7a^2}{16} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

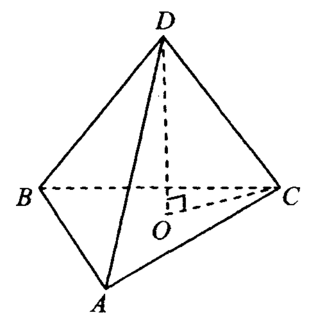
В ΔADK: $KD = AD \cdot \sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

В ΔMKD: $tg\,\angle MKD = \frac{MD}{KD} = 1 \Rightarrow \angle MKD = 45°$.

Ответ: $90°$, $45°$, $45°$.

3.3. Найдите высоту треугольной пирамиды, если все ее боковые ребра по $\sqrt{40}$, а стороны основания равны 10, 10, 12.

Решение:



1) $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{16\cdot 6\cdot 6\cdot 4} = 4\cdot 6\cdot 2 = 48$

2) Так как боковые ребра равны, вершина проектируется в центр описанной окружности.

$$OC = R = \frac{abc}{4S} = \frac{10\cdot 10\cdot 12}{4\cdot 48} = \frac{25}{4}$$

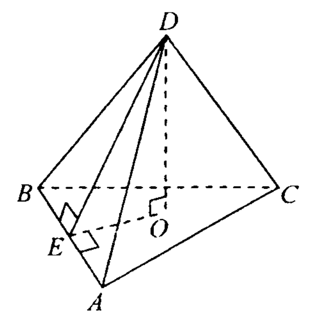
3) $OD = \sqrt{CD^2 - CO^2} = \sqrt{40 - \frac{625}{16}} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

3.4. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Все двугранные углы при основании пирамиды равны $60°$. Найдите высоту пирамиды.

Решение:

Пусть $\angle A$ - прямой.



1) ΔABC: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 10$

2) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$

Так как все двугранные углы при основании равны, то основание высоты DO является центром вписанной окружности.

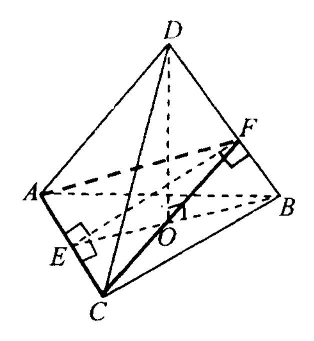
$EO = r = \frac{S}{p} = \frac{24}{12} = 2$

3) ΔDOE: $DO = EO \cdot tg60° = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

3.5. Высота правильной треугольной пирамиды равна 10, сторона основания – 10. Вычислите площадь сечения, проведенного через одну из сторон основания перпендикулярно к противолежащему ребру.

Решение:



1) В ΔABC: $R = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow BO = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$

$EB = \sqrt{CB^2 - CE^2} = 5\sqrt{3}$

2) В ΔDBO: $DB = \sqrt{DO^2 + OB^2} = \sqrt{100 + \frac{100}{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}}$

3) $\Delta DBO \sim \Delta EBF$ (по двум углам):

$$\frac{DO}{EF} = \frac{DB}{EB} \quad \Rightarrow \quad \frac{10}{EF} = \frac{\frac{20}{\sqrt{3}}}{5\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad EF = 50\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{20} = \frac{15}{2}$$

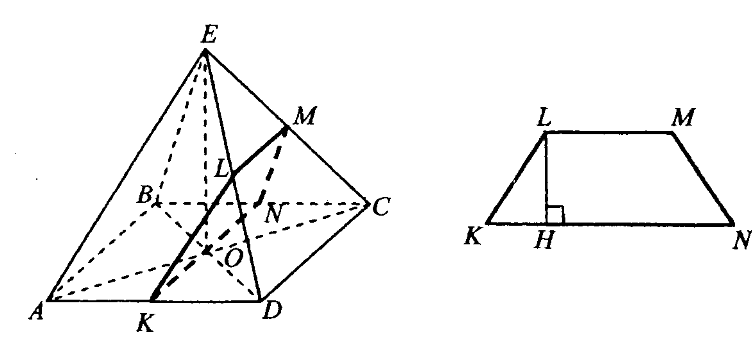
4) $S_{сеч} = \frac{1}{2} AC \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{15}{2} = 37,5$

Ответ: 37,5.

3.6. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 80, сторона основания – 120. Вычислите площадь сечения, проходящего через центр основания параллельно боковой грани пирамиды.

Решение:

Сечение – равнобедренная трапеция $KLMN$.



1) ΔACD: $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = 120\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad AO = \frac{1}{2} AC = 60\sqrt{2}$

2) ΔAEO: $AE = \sqrt{AO^2 + OE^2} = \sqrt{7200 + 6400} = 20\sqrt{34}$

3) $KL = \frac{1}{2} AE = 10\sqrt{34}$; $\quad MN = KL = 10\sqrt{34}$;

$KN = AB = 120$; $\quad LM = \frac{1}{2} CD = 60$

$$KH = \frac{KN - LM}{2} = 30$$

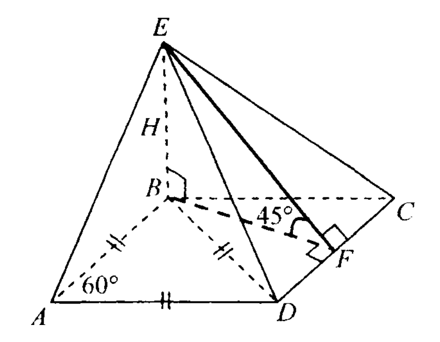
$$LH = \sqrt{LK^2 - KH^2} = \sqrt{100 \cdot 34 - 900} = 50$$

4) $S_{\text{сеч}} = \frac{LM + KN}{2} \cdot LH = \frac{60 + 120}{2} \cdot 50 = 4\,500$

Ответ: 4 500.

3.7. Основанием пирамиды служит ромб, одна из диагоналей которого равна стороне. Высота пирамиды проходит через вершину тупого угла ромба и равна H. Две грани образуют с плоскостью основания углы в $45°$. Найдите боковую поверхность пирамиды.

Решение:



1) ΔBDC - равносторонний $\Rightarrow$ $\angle BCD = 60°$.

ΔEBF - равнобедренный $\Rightarrow$ $BF = BE = H$; $EF = H\sqrt{2}$.

2) В ΔBCF: $\frac{BF}{BC} = \sin 60°$; $BC = \frac{2H\sqrt{3}}{3}$.

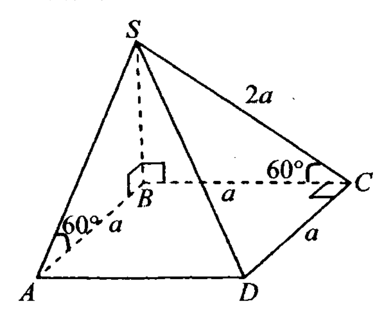
3) $S_{\text{бок}} = 2 \cdot S_{\Delta AEB} + 2 \cdot S_{\Delta EDC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot H \cdot \frac{2H\sqrt{3}}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2H\sqrt{3}}{3} \cdot H\sqrt{2} =$

$$= \frac{2H^2\sqrt{3}}{3} + \frac{2H^2\sqrt{6}}{3} = \frac{2H^2\sqrt{3}}{3}\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

Ответ: $\frac{2H^2\sqrt{3}}{3}\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

3.8. В основании пирамиды лежит квадрат со стороной a. Две соседние боковые грани перпендикулярны к основанию, а две другие наклонены к основанию под углом $60°$. Найдите полную поверхность пирамиды.

Решение:



$$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + 2 \cdot S_{\Delta ASB} + 2 \cdot S_{\Delta SCD}$$

$$S_{\text{осн}} = a^2$$

1) $S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2} AB \cdot SB = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot tg60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

2) В ΔSCD: $\angle SCD = 90°$ (по теореме о трех перпендикулярах)

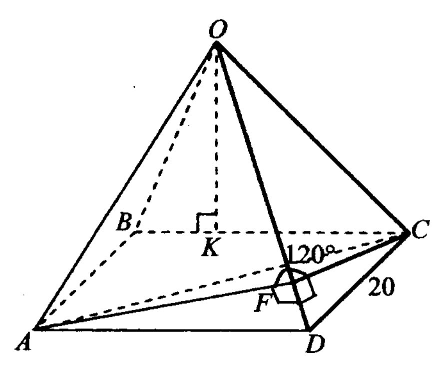
$$S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2} SC \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = a^2$$

3) $S_{\text{полн}} = a^2 + a^2\sqrt{3} + 2a^2 = 3a^2 + a^2\sqrt{3} = \sqrt{3}a^2\left(\sqrt{3}+1\right)$

Ответ: $\sqrt{3}a^2\left(\sqrt{3}+1\right)$.

3.9. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 20, двугранные углы при боковых ребрах по $120°$. Найдите боковую поверхность пирамиды.

Решение:

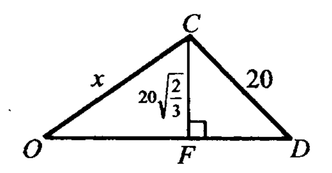


1) $\left.\begin{array}{l} AF \perp OD \\ CF \perp OD \end{array}\right| \Rightarrow \quad \angle AFC = 120^\circ$ (по условию)

2) ΔACB: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 20\sqrt{2}$

3) ΔACF: $\dfrac{AC}{\sin 120^\circ} = \dfrac{FC}{\sin 30^\circ}$ (теорема синусов)

$$FC = \frac{20\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 20\sqrt{\frac{2}{3}}$$



4) В ΔCDF: $CD = 20$; $CF = 20\sqrt{\dfrac{2}{3}}$;

$$FD = \sqrt{CD^2 - CF^2} = \sqrt{400 - 400 \cdot \frac{2}{3}} = 20\sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

5) В ΔOCF: $OC = x$; $CF = 20\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $OF = OD - FD = x - \dfrac{20}{\sqrt{3}}$.

$$x^2 = 400 \cdot \frac{2}{3} + \left(x - \frac{20}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$x^2=\frac{800}{3}+x^2-\frac{40}{\sqrt{3}}x+\frac{400}{3}$$

$$\frac{40}{\sqrt{3}}x=\frac{1200}{3} \quad \Rightarrow \quad x=10\sqrt{3} \text{ (боковое ребро)}$$

6) В ΔBOK :

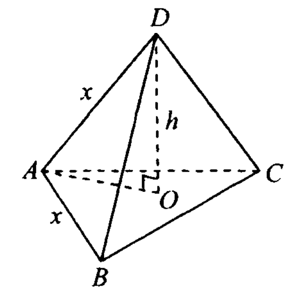
$$OK=\sqrt{BO^2-BK^2}=\sqrt{100\cdot 3-100}=10\sqrt{2} \text{ (апофема боковой грани)}$$

7) $S_{бок}=\frac{1}{2}P_{осн}\cdot OK=\frac{1}{2}\cdot 80\cdot 10\sqrt{2}=400\sqrt{2}$

Ответ: $400\sqrt{2}$.

3.10. Высота правильного тетраэдра равна h. Вычислите его полную поверхность.

Решение:



Введем вспомогательный элемент: $AB=x$. Тогда $AO=R=\frac{x}{\sqrt{3}}$.

В ΔADO: $AD^2=AO^2+OD^2 \quad \Rightarrow \quad x^2=\frac{x^2}{3}+h^2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2=3h^2$

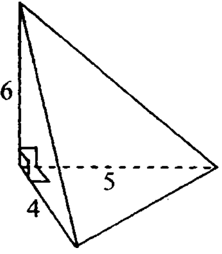
$$x^2=\frac{3h^2}{2}$$

$$S_{осн}=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3h^2\sqrt{3}}{8} \quad \Rightarrow \quad S_{полн}=4\cdot S_{осн}=4\cdot\frac{3h^2\sqrt{3}}{8}=\frac{3h^2\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\frac{3h^2\sqrt{3}}{2}$.

3.11. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны и равны 4, 5 и 6. Найдите его объем.

Решение:



Пусть основанием пирамиды будет грань со сторонами 4 и 5.

Тогда высота пирамиды равна 6.

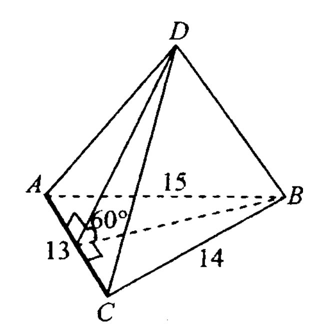
$$V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 20$$

Ответ: 20.

3.12. Стороны оснований треугольной пирамиды равны 13, 15 и 14. Плоскости боковых граней наклонены к основанию под углом $60°$. Найдите полную поверхность пирамиды.

Решение:

$$S_{осн} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 7} = 7 \cdot 3 \cdot 4 = 84$$

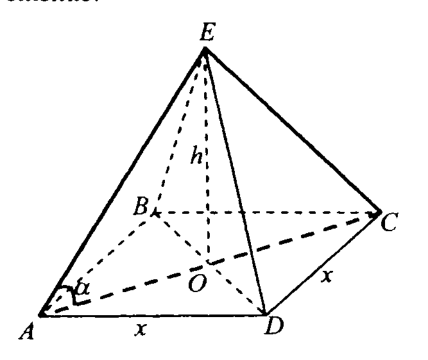


$$S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos 60°} = 168 \quad \Rightarrow \quad S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} = 168 + 84 = 252$$

Ответ: 252.

3.13. Определите объем правильной четырехугольной пирамиды, зная угол ее бокового ребра с плоскостью основания α и площадь ее диагонального сечения S.

Решение:



1) В ΔAE : $AO = EO \cdot ctg\alpha = h \cdot ctg\alpha$; $AC = 2h \cdot ctg\alpha$.

$S_{\Delta AEC} = EO \cdot AO \quad \Rightarrow \quad S = h \cdot h \cdot ctg\alpha \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{S \cdot tg\alpha}$

То есть $EO = \sqrt{S \cdot tg\alpha}$

2) Обозначим $AD = x$.

$AC^2 = AD^2 + DC^2 \quad \Rightarrow \quad 2AD^2 = 4h^2 ctg^2\alpha$

$AD^2 = 2 \cdot S \cdot tg\alpha \cdot ctg^2\alpha = 2S \cdot ctg\alpha$

3) $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot EO = \frac{1}{3} AD^2 \cdot EO = \frac{1}{3} 2S \cdot ctg\alpha \cdot \sqrt{S \cdot tg\alpha} = \frac{2}{3} S\sqrt{S}\sqrt{ctg\alpha}$

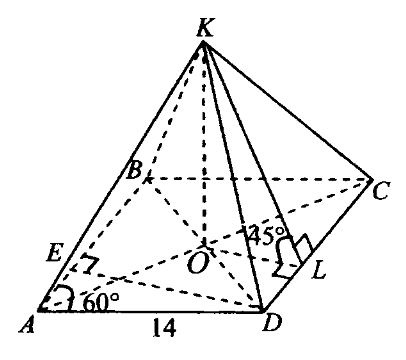
Ответ: $\frac{2}{3} S\sqrt{S}\sqrt{ctg\alpha}$.

3.14. Основанием пирамиды служит ромб со стороной 14 см и острым углом $60°$. Двугранные углы при основании пирамиды по $45°$. Найдите объем пирамиды.

Решение:

1) $S_{осн} = AB \cdot AD \cdot \sin 60° = 14^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \quad \sqrt{\ }$

$S_{осн} = DE \cdot AB \quad \Rightarrow \quad DE = \frac{S_{осн}}{AB} = \frac{98\sqrt{3}}{14} = \quad \sqrt{\ }$ (высота ромба)



$$OL = \frac{1}{2}DE = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

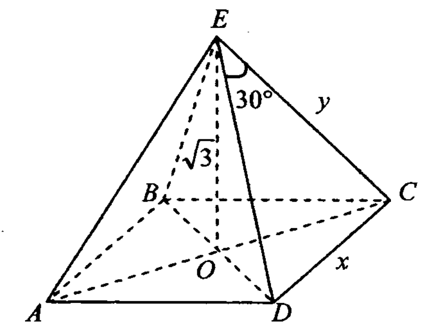
2) ΔKOL: $KO = OL = \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ (высота пирамиды)

3) $V = \dfrac{1}{3}S_{осн} \cdot KO = \dfrac{1}{3} \cdot 98\sqrt{3} \cdot \dfrac{7\sqrt{3}}{2} = 343 \quad (см^3)$

Ответ: 343 $см^3$.

3.15. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой высота равна $\sqrt{3}$, а плоский угол при вершине равен $30°$.

Решение:



Обозначим: $CD = x$; $CE = y$.

1) В ΔACD: $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = x\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad OC = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$

В ΔCOE: $CO^2+OE^2=CE^2 \quad \Rightarrow \quad 3+\frac{x^2}{2}=y^2$

2) В ΔDEC:

$DC^2=DE^2+EC^2-2DE\cdot EC\cos 30°$ (теорема косинусов)

$x^2=y^2+y^2-y^2\sqrt{3}$

$x^2=2y^2-y^2\sqrt{3}$

3) $\begin{cases} 3+\frac{x^2}{2}=y^2 \\ x^2=2y^2-y^2\sqrt{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 6+x^2=2y^2 \\ y^2=\frac{x^2}{2-\sqrt{3}} \end{cases}$

$6+x^2=\frac{2x^2}{2-\sqrt{3}}$

$12-6\sqrt{3}+2x^2-\sqrt{3}x^2=2x^2$

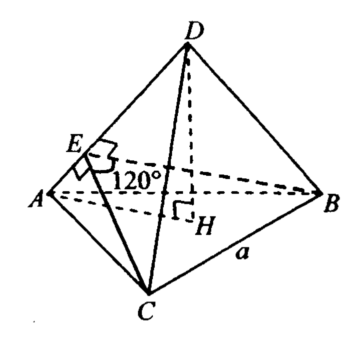
$x^2=\frac{12-6\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}-6=2\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$

4) $V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot EO=\frac{1}{3}\cdot x^2\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}=2\left(2-\sqrt{3}\right)$

Ответ: $2\left(2-\sqrt{3}\right)$.

3.16. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, двугранные углы при боковых ребрах по $120°$. Найдите объем пирамиды.

Решение:



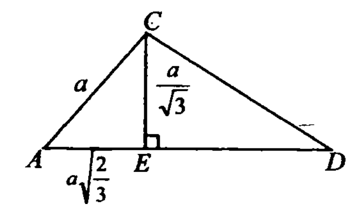
$$S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

1) Из ΔCEB:

$CB^2 = CE^2 + EB^2 - 2CE \cdot EB\cos 120°$ (теорема косинусов)

$a^2 = x^2 + x^2 + x^2$

$x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, то есть $EC = \frac{a}{\sqrt{3}}$



2) Из ΔACD: $AE = \sqrt{CA^2 - CE^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Обозначим: $AD = DC = x$.

$DE^2 + EC^2 = DC^2$

$$\left(x - a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \frac{a^2}{3} = x^2$$

$$x^2 - 2ax\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2a^2}{3} + \frac{a^2}{3} = x^2$$

$x = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$ (боковое ребро пирамиды)

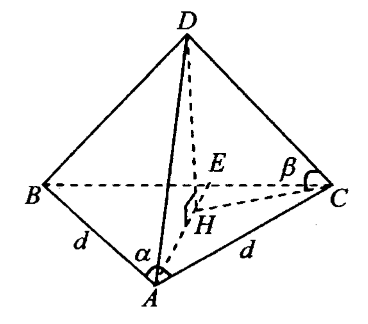
3) ΔAHD: $AH = \frac{AC}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{8} - \frac{a^2}{3}} = \frac{a}{2\sqrt{6}}$$

4) $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot DH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2\sqrt{6}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}$ Ответ: $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$.

3.17. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с боковыми сторонами d, и углом между ними α. Все боковые ребра наклонены к основанию под углом β. Найдите объем пирамиды.

Решение:



$$S_{осн} = \frac{1}{2}d^2 \sin\alpha$$

1) ΔABC: $AE = d\cos\frac{\alpha}{2}$; $EC = d\sin\frac{\alpha}{2}$; $BC = 2EC = 2d\sin\frac{\alpha}{2}$.

$$HC = R = \frac{abc}{4S} = \frac{d \cdot d \cdot 2d\sin\frac{\alpha}{2}}{4 \cdot \frac{1}{2}d^2 \sin\alpha} = \frac{d}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

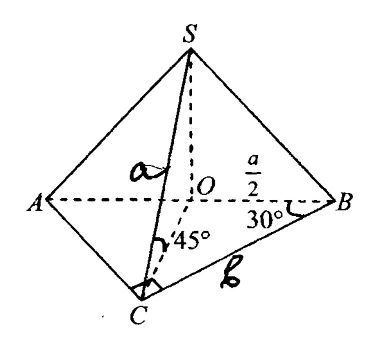
2) ΔDHC: $DH = HC \cdot tg\ \beta = \dfrac{d \cdot tg\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$

3) $V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot DH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}d^2 \sin\alpha \dfrac{d \cdot tg\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{6}d^3 \sin\frac{\alpha}{2} tg\beta$

Ответ: $\frac{1}{6}d^3 \sin\frac{\alpha}{2} tg\beta$.

3.18. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной a и острым углом $30°$. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом $45°$. Найдите объем пирамиды.

Решение:



1) Так как боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, вершина пирамиды S проектируется в центр описанной окружности – точку O, то есть в середину гипотенузы.

$$OA = OB = CO = \frac{a}{2}$$

2) ΔABC: $AC = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$; $BC = AB \cdot \cos 30° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

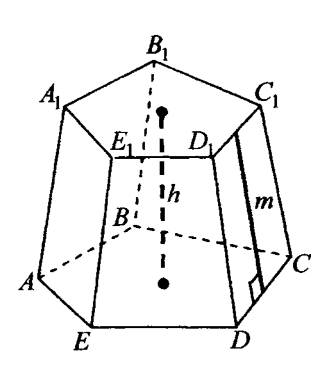
ΔCSO - прямоугольный, равнобедренный.

$SO = OC = \frac{a}{2} = h$ - высота пирамиды.

3) $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

Ответ: $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

§4. УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА



h - высота пирамиды

m - апофема пирамиды

$S_{бок} = \sum_{i=1}^{n} S_i$, где

S_i - площадь одной боковой грани

$S_{полн} = S_{бок} + S_1 + S_2$, где

S_1 - площадь нижнего основания

S_2 - площадь верхнего основания

$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right)$$

Для правильной усеченной пирамиды выполняются соотношения:

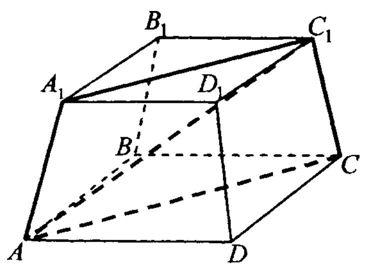
$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)\cdot m$, где P_1 - периметр нижнего основания

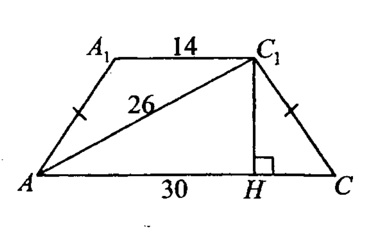
P_2 - периметр верхнего основания

m - апофема

4.1. Площади оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 98 и 450, диагональ пирамиды равна 26. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания усеченной пирамиды.

Решение:





1) $ABCD$ - квадрат $\Rightarrow$ $AD^2 = 450$ $\Rightarrow$ $AD = 15\sqrt{2}$

$AC = AD\cdot\sqrt{2} = 30$

$A_1B_1C_1D_1$ - квадрат $\Rightarrow$ $A_1D_1^2 = 98$ $\Rightarrow$ $A_1D_1 = 7\sqrt{2}$

$A_1C_1 = A_1D_1 \cdot \sqrt{2} = 14$

2) Рассмотрим AA_1C_1C - равнобедренную трапецию:

$$HC = \frac{AC - A_1C_1}{2} = 8 \quad \Rightarrow \quad AH = 22$$

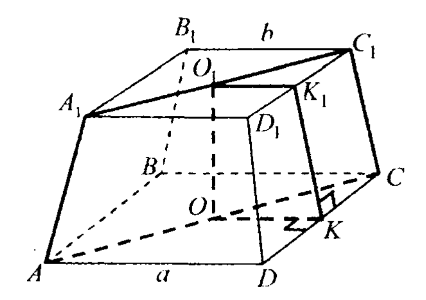
$$C_1H = \sqrt{AC_1^2 - AH^2} = 8\sqrt{3}$$

3) ΔC_1HC: $tg\angle C_1CH = \dfrac{C_1H}{CH} = \dfrac{8\sqrt{3}}{8} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \angle C_1CH = 60°$

Ответ: $60°$.

4.2. Основанием правильной усеченной пирамиды служат квадраты со сторонами a и b $(a > b)$. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α. Определите величину двугранных углов при сторонах оснований.

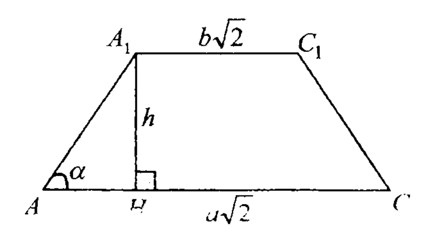
Решение:



Найдем $\angle OKK_1$.

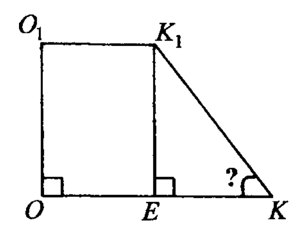
1) $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = a\sqrt{2}$; $A_1C_1 = \sqrt{A_1D_1^2 + D_1C_1^2} = b\sqrt{2}$

2) Рассмотрим AA_1C_1C - равнобедренную трапецию.



$$AH = \frac{AC - A_1C_1}{2} = \frac{\sqrt{2}(a-b)}{2}; \qquad A_1H = AH \cdot tg\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)tg\alpha$$

3) Рассмотрим OO_1K_1K - прямоугольную трапецию.



$$EK_1 = OO_1 = A_1H = \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)tg\alpha$$

$$OK = \frac{a}{2} \quad \text{и} \quad O_1K_1 = \frac{b}{2}$$

$$EK = OK - O_1K_1 = \frac{a-b}{2}$$

4) $$tg\angle OKK_1 = \frac{EK_1}{EK} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)tg\alpha}{\frac{a-b}{2}} = \sqrt{2}\,tg\alpha$$

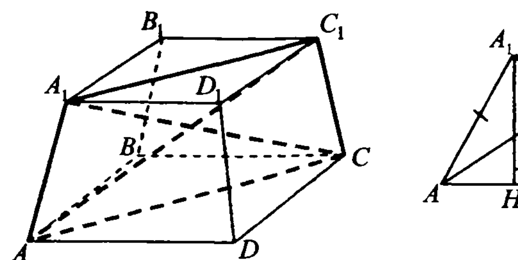
Тогда $\angle OKK_1 = arctg\left(\sqrt{2}\,tg\alpha\right)$.

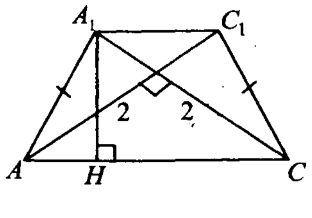
Ответ: $arctg\left(\sqrt{2}\,tg\alpha\right)$.

4.3. Диагонали AC_1 и A_1C правильной четырехугольной усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взаимно перпендикулярны, каждая из них равна 2. Найдите высоту.

Решение:

Так как в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, высота равна средней линии трапеции, то есть $A_1H = HC$.





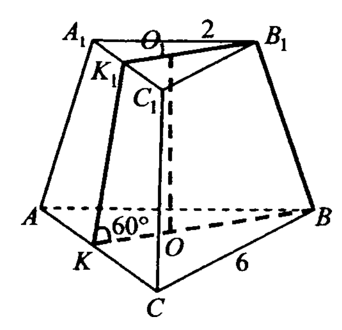
По теореме Пифагора: $A_1C^2 = A_1H^2 + HC^2 \quad \Rightarrow \quad 2A_1H^2 = A_1C^2$

$$A_1H = \frac{A_1C}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

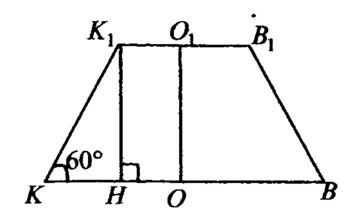
4.4. Стороны основания правильной треугольной усеченной пирамиды равны 2 и 6. Боковая грань образует с большим основанием угол в $60°$. Найдите высоту.

Решение:



1) Из ΔABC: $OK = r = \dfrac{AB}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}}$.

Из $\Delta A_1B_1C_1$: $O_1K_1 = r_1 = \dfrac{A_1B_1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$



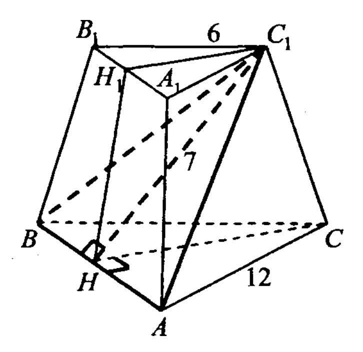
2) $KH = KO - K_1O_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Из ΔKHK_1: $K_1H = KH \cdot tg60° = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 2$

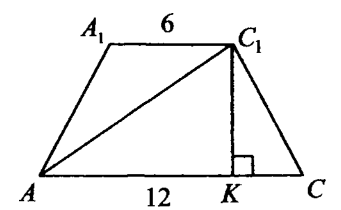
Ответ: 2.

4.5. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 6 и 12. Расстояние от стороны большего основания до противолежащей вершины меньшего основания равно 7. Найдите боковую поверхность усеченной пирамиды.

Решение:



1) Из ΔAC_1B: $C_1H = 7$; $AH = 6$; $AC_1 = \sqrt{AH^2 + HC_1^2} = \sqrt{85}$



2) $KC = \dfrac{AC - A_1C_1}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad AK = 9$

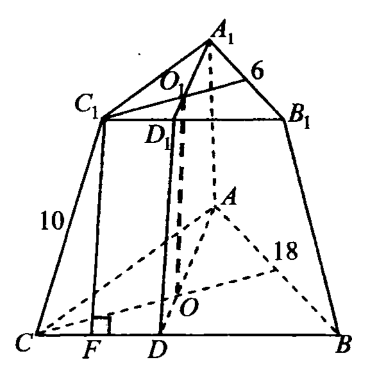
$C_1K = \sqrt{C_1A^2 - AK^2} = 2$ (апофема)

3) $S_{бок} = \dfrac{1}{2}(P_1 + P_2)\cdot m = \dfrac{1}{2}(18+36)\cdot 2 = 54$

Ответ: 54.

4.6. Определите полную поверхность правильной треугольной усеченной пирамиды, боковое ребро которой равно 10, а стороны оснований 18 и 6.

Решение:



$S_{полн} = S_{бок} + S_{верх.\ осн.} + S_{нижн.\ осн.}$

1) $S_{верх.\ осн.} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

$S_{нижн.\ осн.} = \dfrac{A_1B_1^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{18^2\sqrt{3}}{4} = 81\sqrt{3}$

2) Рассмотрим CC_1B_1B - равнобедренную трапецию:

$CF = \dfrac{BC - B_1C_1}{2} = \dfrac{18-6}{2} = 6$

3) Из ΔCC_1F: $C_1F = \sqrt{C_1C^2 - CF^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (апофема)

4) $S_{бок} = \dfrac{1}{2}C_1F\cdot(P_1 + P_2) = \dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot(3\cdot 18 + 3\cdot 6) = 12(18+6) = 288$

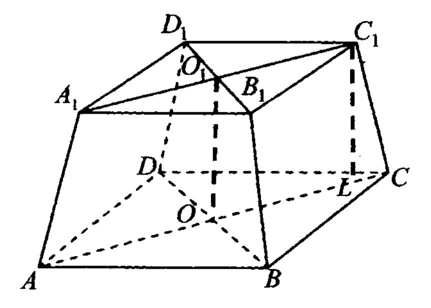
$S_{\text{полн}} = 288 + 9\sqrt{3} + 81\sqrt{3} = 288 + 90\sqrt{3}$

Ответ: $288 + 90\sqrt{3}$.

4.7. Боковое ребро правильной четырехугольной усеченной пирамиды равно 3, стороны оснований равны 5 и 1. Найдите объем пирамиды.

Решение:

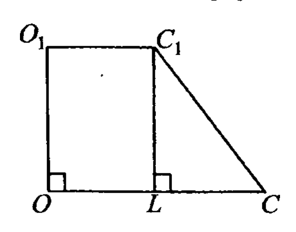
$$V_{\text{ус. пир.}} = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right)$$



1) $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5\sqrt{2}$; $\quad OC = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

$A_1C_1 = \sqrt{A_1B_1^2 + B_1C_1^2} = \sqrt{2}$; $\quad O_1C_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2) Рассмотрим OO_1C_1C - прямоугольную трапецию:



$$LC = OC - O_1C_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

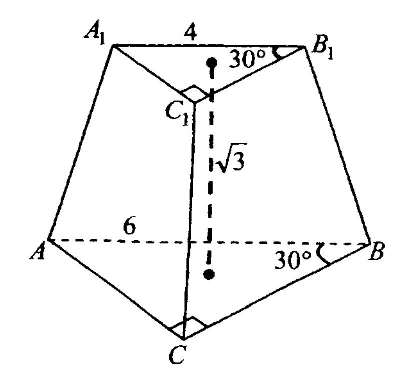
$$C_1L = \sqrt{C_1C^2 - LC^2} = \sqrt{9-8} = 1$$

3) $V_{\text{ус. пир.}} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \left(5^2 + 1 + \sqrt{25 \cdot 1}\right) = \frac{1}{3} \cdot 31 = 10\frac{1}{3}$

Ответ: $10\frac{1}{3}$.

4.8. Основаниями усеченной пирамиды служат прямоугольные треугольники с острым углом $30°$. Гипотенузы треугольников равны соответственно 6 и 4. Высота усеченной пирамиды $\sqrt{3}$. Найдите объем усеченной пирамиды.

Решение:



1) ΔABC: $AC = 3$; $BC = 3\sqrt{3}$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

2) $\Delta A_1B_1C_1$: $A_1C_1 = 2$; $B_1C_1 = 2\sqrt{3}$.

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1C_1 = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

3) $$V = \frac{1}{3} h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{3}\left(\frac{9\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{\frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{9\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{19\sqrt{3}}{2} = 9,5$$

Ответ: 9,5.

Если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной ее основанию, то:

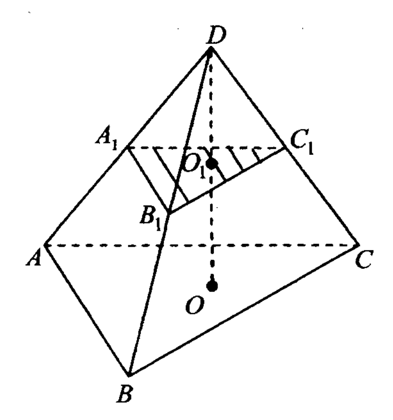
1) боковые ребра и высота пирамиды разделяются на пропорциональные друг другу отрезки;

2) сечением является многоугольник, подобный основанию;

3) отношение площадей сечения и основания равно отношению квадратов их расстояний до вершины пирамиды.

4.9. В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, параллельная основанию, если она делит высоту в отношении $3:2$?

Решение:



$$DO_1 : O_1O = 3:2 \quad \Rightarrow \quad DO_1 : DO = 3:5$$

1) Обозначим коэффициент пропорциональности для отрезков, на которые делится высота пирамиды, через x. Тогда:
$DO_1 = 3x$; $O_1O = 2x$; $DO = 5x$.

2) Обозначим: $S_{\Delta ABC} = S_1$; $S_{\Delta A_1B_1C_1} = S_2$.

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$ (по приведенному выше свойству 3)

3) Обозначим коэффициент пропорциональности для площадей верхнего и нижнего оснований усеченной пирамиды через y. Тогда:
$S_1 = 9y$; $S_2 = 25y$.

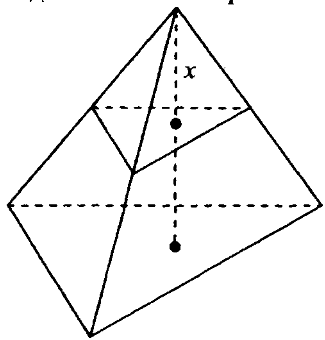
$$\frac{V_{\text{пир.}}}{V_{\text{ус. пир.}}}=\frac{\frac{1}{3}DO_1\cdot S_1}{\frac{1}{3}O_1O\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1\cdot S_2}\right)}=\frac{3x\cdot 9y}{2x(9y+25y+15y)}=\frac{27xy}{98xy}=\frac{27}{98}$$

Ответ: $\frac{27}{98}$.

4.10. Найдите объем усеченной пирамиды, если площади ее оснований равны 96 и 24, а высота соответствующей полной пирамиды равна 16.

Решение:

Для простоты изобразим треугольную пирамиду, хотя в условии задачи это не оговаривается.



Обозначим через x расстояние от плоскости сечения до вершины пирамиды.

1) По третьему свойству отношение площадей сечения и основания равно отношению квадратов их расстояний до вершины пирамиды, то есть: $\frac{96}{24}=\frac{16^2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x=8$.

2) Тогда высота усеченной пирамиды: $h=16-x=8$.

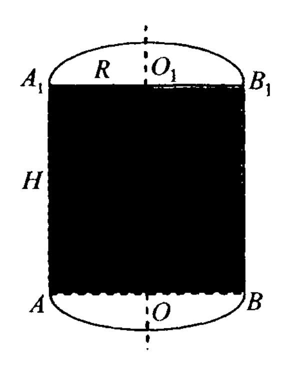
3) $V_{\text{ус. пир.}}=\frac{1}{3}\cdot 8\cdot\left(96+24+\sqrt{96\cdot 24}\right)=448$

Ответ: 448.

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

§5. ЦИЛИНДР

Прямым круговым цилиндром называется фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей одну из его сторон.



OO_1 - ось цилиндра

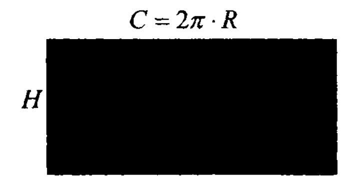
$AA_1 = H$ - образующая цилиндра

$AO = A_1O_1 = R$ - радиус цилиндра

Основания – равные круги с центрами в точках O и O_1

AA_1B_1B - прямоугольник, осевое сечение цилиндра

$S_{AA_1B_1B} = 2R \cdot H$



$S_{\text{бок}} = 2\pi R \cdot H = \pi \cdot d \cdot H$

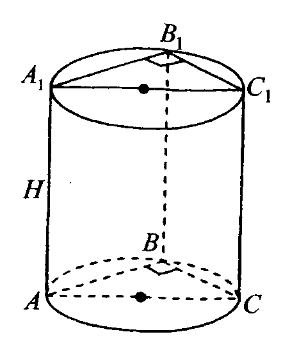
$S_{\text{полн}} = 2\pi R \cdot H + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R)$

$V_{\text{цил}} = \pi R^2 \cdot H$

5.1. Через образующую цилиндра проведены два взаимно перпендикулярных сечения, площади которых равны 45 и 200. Найдите площадь осевого сечения.

Решение:

Обозначим: $AA_1 = H$.



1) $S_{AA_1B_1B} = H \cdot AB \quad \Rightarrow \quad AB = \dfrac{45}{H}$

$S_{BB_1C_1C} = H \cdot BC \quad \Rightarrow \quad BC = \dfrac{200}{H}$

2) $\Delta ABC: \ AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{\dfrac{45^2}{H^2} + \dfrac{200^2}{H^2}} = \dfrac{205}{H}$

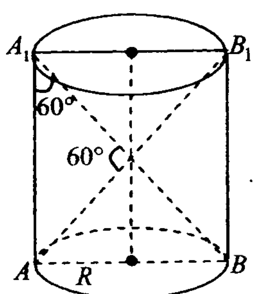
3) Поскольку $\angle ABC$ прямой, AC является диаметром основания.

$S_{осев} = S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC = H \cdot \dfrac{205}{H} = 205$

Ответ: 205.

5.2. Из точки пересечения диагоналей осевого сечения цилиндра образующая видна под углом $60°$. Площадь основания равна S. Найдите боковую поверхность цилиндра.

Решение:



1) $S_{осн} = S \quad \Rightarrow \quad \pi R^2 = S \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

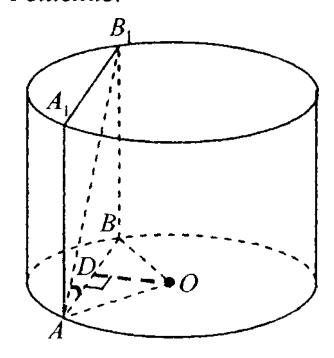
2) $\Delta AA_1B: \quad AA_1 = AB \cdot tg30^\circ = \frac{2R}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$

3) $S_{бок} = 2\pi R \cdot H = 2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}} \cdot 2\sqrt{\frac{S}{3\pi}} = \frac{4S}{\sqrt{3}} = \frac{4S\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\frac{4S\sqrt{3}}{3}$.

5.3. Концы отрезка AB_1 лежат на окружностях оснований цилиндра. Высота цилиндра равна $12\sqrt{3}$, радиус основания равен 10, а угол между прямой AB_1 и плоскостью основания цилиндра равен 60°. Найдите расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки A и B_1.

Решение:



$\angle B_1AB = 60^\circ$. Найдем высоту OD.

1) $\Delta AB_1B: \quad AB = B_1B \cdot ctg60^\circ = 12\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 12$

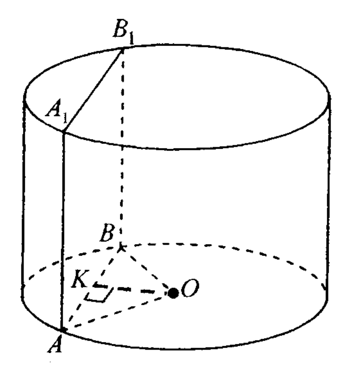
2) ΔAOB - равнобедренный $(AO = OB = R)$, следовательно:

$AD = \frac{AB}{2} = 6; \quad OD = \sqrt{AO^2 - AD^2} = \sqrt{100-36} = 8$.

Ответ: 8.

5.4. Найдите длину образующей цилиндра, если площадь боковой поверхности равна 3π $см^2$, а площадь сечения цилиндра, параллельного оси и отстоящего от нее на $\sqrt{2}$ $см$, равна 1 $см^2$.

Решение:



1) ΔABO: $AK = \sqrt{AO^2 - OK^2} = \sqrt{R^2 - 2}$;

$AB = 2 \cdot AK = 2\sqrt{R^2 - 2}$.

2) $\begin{cases} S_{бок} = 3\pi \\ S_{AA_1B_1B} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\pi R \cdot H = 3\pi \\ H \cdot AB = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2R \cdot H = 3 \\ H \cdot 2\sqrt{R^2 - 2} = 1 \end{cases}$

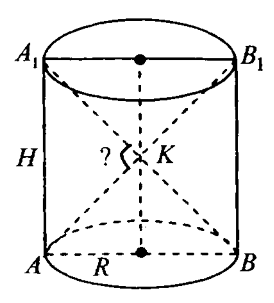
$\begin{cases} 2R \cdot H = 3 \\ 4H^2(R^2 - 2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2R \cdot H = 3 \\ (2R \cdot H)^2 - 8H^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2R \cdot H = 3 \\ 9 - 8H^2 = 1 \end{cases}$

$H = 1$; $R = \dfrac{3}{2}$.

Ответ: 1 $см$.

5.5. Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения, как $\pi : 4$. Найдите угол между диагоналями осевого сечения.

Решение:



$$\frac{S_{осн}}{S_{AA_1B_1B}}=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi R^2}{2R\cdot H}=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{R}{H}=\frac{1}{2} \Rightarrow H=2R$$

Значит, $AA_1=AB$ и AA_1B_1B - квадрат.

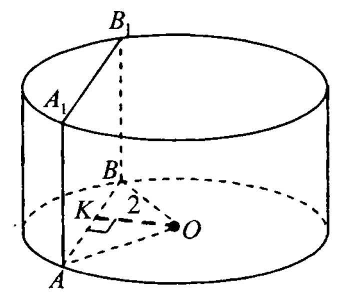
Поскольку диагонали квадрата пересекаются под прямым углом:

$\angle AKA_1=90°$

Ответ: $90°$.

5.6. В цилиндре проведена параллельно оси плоскость, отсекающая от окружности основания дугу $120°$. Длина оси равна 5, расстояние от нее до секущей плоскости равно 2. Определите площадь сечения.

Решение:



По условию: $AA_1=BB_1=5$.

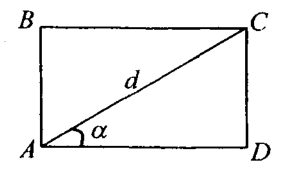
1) В ΔAKO: $OK=2$; $\angle AOK=60°$; $AK=OK\cdot tg60°=2\sqrt{3}$.

2) $S_{AA_1B_1B}=AA_1\cdot AB=5\cdot 4\sqrt{3}=20\sqrt{3}$

Ответ: $20\sqrt{3}$.

5.7. Боковая поверхность цилиндра, будучи развернута, представляет собой прямоугольник, у которого диагональ равна d и составляет угол с основанием α. Определите объем цилиндра.

Решение:



$CD = H = AC \cdot \sin\alpha = d \cdot \sin\alpha$

$AD = C = AC \cdot \cos\alpha = d \cdot \cos\alpha$ (длина окружности)

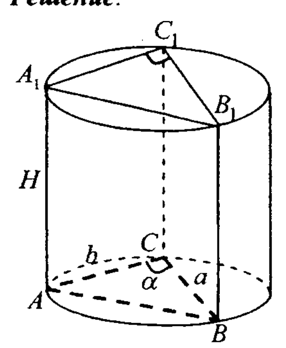
$d \cdot \cos\alpha = 2\pi R \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{d \cdot \cos\alpha}{2\pi}$

$$V_{\text{цил}} = \pi R^2 \cdot H = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot \cos^2\alpha}{4\pi^2} \cdot d \cdot \sin\alpha = \frac{d^3 \cdot \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha}{4\pi}$$

Ответ: $\dfrac{d^3 \cdot \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha}{4\pi}$.

5.8. Через образующую цилиндра проведены две плоскости, пересекающие цилиндр. Угол между плоскостями равен α, а площади получившихся сечений равны Q. Радиус основания цилиндра равен R. Найдите объем цилиндра.

Решение:



Обозначим: $AC = b$; $CB = a$; $AA_1 = H$. Тогда $a = b = \dfrac{Q}{H}$.

1) В ΔACB по теореме косинусов:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle ACB = \frac{2Q^2}{H^2} - 2 \cdot \frac{Q^2}{H^2} \cdot \cos\alpha =$$

$$= \frac{2Q^2}{H^2}(1-\cos\alpha) = \frac{4Q^2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{H^2}$$

$$AB = \frac{2Q \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{H}$$

2) По теореме синусов: $2R = \dfrac{AB}{\sin \angle ACB}$.

$$2R = \frac{2Q \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{H \cdot \sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{Q \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{H \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{Q}{2H \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}$$

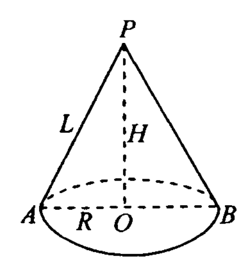
$$H = \frac{Q}{2R \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$V_{\text{цил}} = \pi R^2 \cdot H = \pi R^2 \cdot \frac{Q}{2R \cdot \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi R \cdot Q}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Ответ: $\dfrac{\pi R \cdot Q}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

§6. КОНУС

Прямым круговым конусом называется фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет.



$PO = H$ - высота конуса

$AP = BP = L$ - образующие конуса

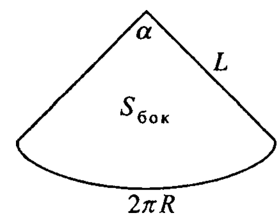
$AO = BO = R$ - радиус конуса

PO - ось конуса

ΔAPB - равнобедренный, осевое сечение

$S_{осев} = H \cdot R$

Свойство: Все образующие конуса равны, равнонаклонены к плоскости основания и образуют равные углы с высотой конуса.



$\alpha = \dfrac{2\pi R}{L}$ - угол развертки конуса

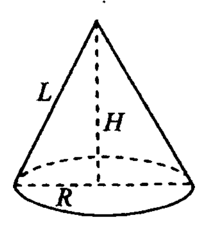
$S_{бок} = \pi R \cdot L$

$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} = \pi R \cdot L + \pi R^2 = \pi R\left(L + R\right)$

Объем конуса: $V = \dfrac{1}{3} S_{осн} \cdot H = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot H$.

6.1. Боковая поверхность конуса вдвое больше площади его основания. Найдите угол в развертке боковой поверхности конуса.

Решение:



$S_{бок} = \pi R \cdot L$

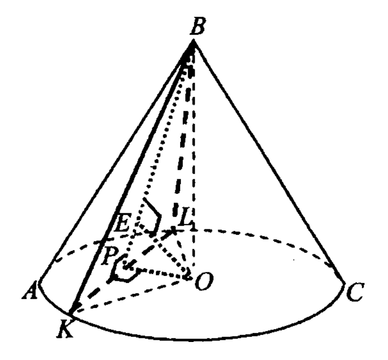
$S_{бок} = 2S_{осн} \quad \Rightarrow \quad \pi R \cdot L = 2\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad L = 2R$

$\alpha = \frac{2\pi R}{L} = \frac{2\pi \cdot R}{2R} = \pi = 180°$ - угол развертки конуса

Ответ: 180°.

6.2. Высота конуса 20, радиус его основания 25. Найдите площадь сечения, проведенного через вершину, если расстояние от него до центра основания конуса равно 12.

Решение:



1) ΔBEO: $BE = \sqrt{BO^2 - OE^2} = \sqrt{400 - 144} = 16$.

2) В ΔBPO:

$OB^2 = BE \cdot BP$ (свойство высоты, опущенной из прямого угла).

Тогда $BP = \frac{OB^2}{BE} = \frac{400}{16} = 25$.

$OP = \sqrt{BP^2 - BO^2} = \sqrt{625 - 400} = 15$

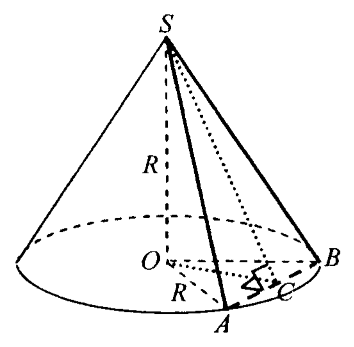
3) ΔKPO: $KP = \sqrt{KO^2 - OP^2} = \sqrt{625 - 225} = 20$

4) $S_{сеч} = \frac{1}{2} KL \cdot BP = KP \cdot BP = 20 \cdot 25 = 500$

Ответ: 500.

6.3. Высота прямого кругового конуса равна радиусу основания R Через его вершину проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в $60°$. Найдите площадь сечения.

Решение:



$\cup AB = 60° \quad \Rightarrow \quad \angle AOB = 60°$

ΔAOB - равносторонний, следовательно, $AB = R$.

$$OC = \sqrt{OB^2 - BC^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

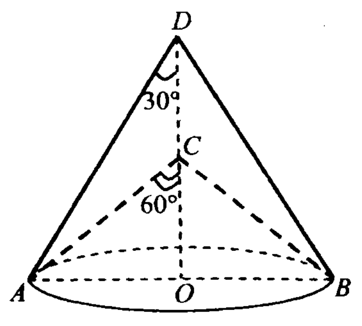
$$SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = \sqrt{R^2 + \frac{3R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{7}}{2}$$

$$S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2} AB \cdot SC = \frac{1}{2} \cdot R \cdot \frac{R\sqrt{7}}{2} = \frac{R^2\sqrt{7}}{4}$$

Ответ: $\frac{R^2\sqrt{7}}{4}$.

6.4. На общем основании построены два конуса один внутри другого так, что их вершины находятся на одной прямой, на расстоянии 12 одна от другой. Определите поверхность тела, ограниченного коническими поверхностями этих конусов, если угол при вершине осевого сечения одного конуса равен $120°$, а другого $60°$.

Решение:



1) ΔADC: $\angle ACD = 180° - 60° = 120°$, тогда $\angle DAC = 30°$.

ΔADC - равнобедренный, следовательно, $AC = CD = 12$.

2) Из ΔACO: $AO = AC \cdot \sin 60° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

3) В ΔADO:

$AD = 2 \cdot AO = 12\sqrt{3}$ - свойство катета, лежащего против угла $30°$

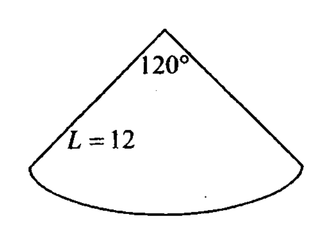
4) $S = S_1 + S_2 = \pi R \cdot L_1 + \pi R \cdot L_2 = \pi \cdot AO \cdot AD + \pi \cdot AO \cdot AC =$

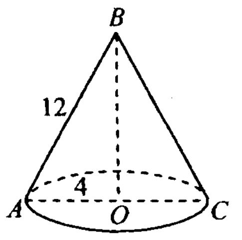
$= \pi \cdot AO(AD + AC) = \pi 6\sqrt{3}(12\sqrt{3} + 12) = 72\pi\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$

Ответ: $72\pi\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$.

6.5. Найдите объем конуса, боковая поверхность которого представляет собой круговой сектор с углом $120°$ и радиусом 12.

Решение:





1) $\alpha = \frac{2\pi R}{L}$ - угол развертки конуса

$$\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi R}{12} \quad \Rightarrow \quad R=4$$

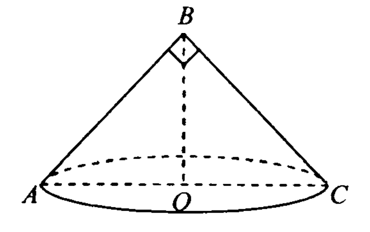
2) ΔABO: $BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{144-16}=8\sqrt{2}$

3) $V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot H=\frac{1}{3}\pi\cdot 16\cdot 8\sqrt{2}=\frac{128\sqrt{2}}{3}\pi$

Ответ: $\frac{128\sqrt{2}}{3}\pi$.

6.6. Объем конуса равен 18π. Осевое сечение конуса прямоугольный треугольник. Найдите высоту конуса.

Решение:



1) $AO=OC=BO=R$ (свойство медианы, проведенной из вершины прямого угла)

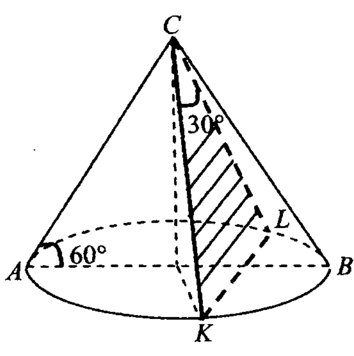
2) $V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot H \quad \Rightarrow \quad 18\pi=\frac{1}{3}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad R^3=54$

$BO=R=\sqrt[3]{54}=3\cdot\sqrt[3]{2}$

Ответ: $3\cdot\sqrt[3]{2}$.

6.7. Образующая конуса наклонена к плоскости его основания под углом $60°$. Площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен $30°$, равна 16. Найдите площадь полной поверхности конуса.

Решение:



1) ΔABC - равносторонний $\Rightarrow \quad 2R = L \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{L}{2}$

2) ΔCKL: $S = \dfrac{1}{2} CK \cdot CL \cdot \sin \angle KCL$

$16 = \dfrac{1}{2} \cdot L \cdot L \cdot \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad L^2 = 64 \quad \Rightarrow \quad L = 8; \ R = 4$

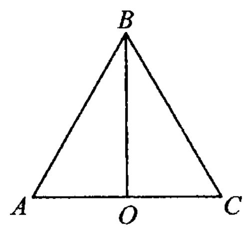
3) $S_{\text{полн}} = \pi R(R + L) = 4\pi(4 + 8) = 48\pi$

Ответ: 48π.

6.8. Объемы равносторонних конуса и цилиндра равны. Найдите отношение их боковых поверхностей.

Решение:

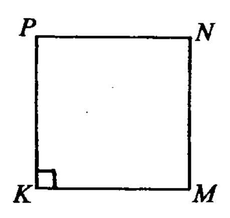
1) Осевое сечение конуса – равносторонний ΔABC.



$AC = AB = BC = 2R_{\text{к}}$; $\quad BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{4R_{\text{к}}^2 - R_{\text{к}}^2} = R_{\text{к}}\sqrt{3}$

$V_{\text{к}} = \dfrac{1}{3}\pi R_{\text{к}}^2 \cdot H = \dfrac{1}{3}\pi R_{\text{к}}^2 \cdot R_{\text{к}}\sqrt{3} = \dfrac{\pi R_{\text{к}}^3}{\sqrt{3}}$

2) Осевое сечение цилиндра – квадрат $KPNM$.



$KP = KM = 2R_{ц}$; $\quad V_{ц} = \pi R_{ц}^2 \cdot H = \pi R_{ц}^2 \cdot 2R_{ц} = 2\pi R_{ц}^3$

3) $V_{к} = V_{ц}$

$$\frac{\pi R_{к}^3}{\sqrt{3}} = 2\pi R_{ц}^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{R_{к}^3}{R_{ц}^3} = 2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_{к}}{R_{ц}} = \sqrt[6]{12}$$

4) $S_{бок.\,конуса} = \pi R_{к} \cdot L = 2\pi R_{к}^2$

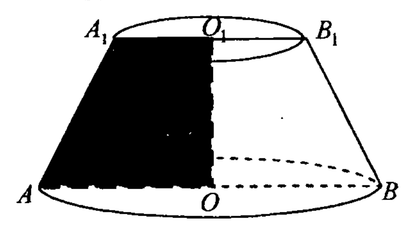
$S_{бок.\,цилиндра} = 2\pi R_{ц} \cdot H = 2\pi R_{ц} \cdot 2R_{ц} = 4\pi R_{ц}^2$

$$\frac{S_{бок.\,конуса}}{S_{бок.\,цилиндра}} = \frac{2\pi R_{к}^2}{4\pi R_{ц}^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{R_{к}}{R_{ц}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt[6]{12}\right)^2 = \frac{\sqrt[3]{12}}{2}$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt[3]{12}}{2}$.

§7. УСЕЧЕННЫЙ КОНУС

Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной к основаниям.



$AA_1 = BB_1 = L$ - образующие

$OO_1 = H$ - высота (ось)

$AO = BO = R$, $A_1O_1 = B_1O_1 = r$

AA_1B_1B - равнобедренная трапеция, осевое сечение

$S_{\text{осев}} = (R + r)H$

Свойство: Все образующие усеченного конуса равны и равнонаклонены к плоскостям оснований.

$S_{\text{бок}} = \pi L(R + r)$

$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_1 + S_2 = \pi L(R + r) + \pi(R^2 + r^2)$

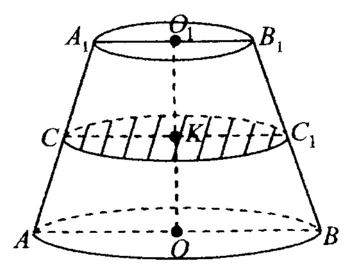
$V = \dfrac{\pi H}{3}(R^2 + R \cdot r + r^2) = \dfrac{H}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right)$

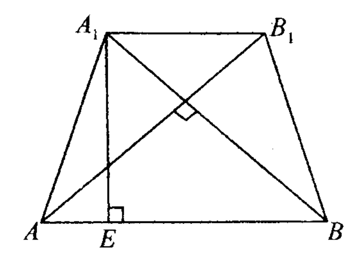
7.1. Диагонали осевого сечения усеченного конуса взаимно перпендикулярны, высота равна H. Найдите площадь сечения усеченного конуса, проведенного через середину высоты параллельно основаниям.

Решение:

AA_1B_1B - осевое сечение конуса

1) Так как $AB_1 \perp A_1B$, то $A_1E = EB = H$ (свойство равнобедренной трапеции). Средняя линия CC_1 равнобедренной трапеции AA_1B_1B по длине совпадает с $EB = H$.





2) $CK = \frac{1}{2}CC_1 = \frac{1}{2}EB = \frac{1}{2}H$

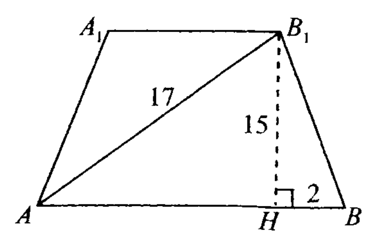
3) $S_{сеч} = \pi \cdot CK^2 = \frac{\pi H^2}{4}$

Ответ: $\frac{\pi H^2}{4}$.

7.2. В усеченном конусе диагональ его осевого сечения равна 17, высота 15 и проекция образующей на плоскость основания - 2. Найдите объем усеченного конуса.

Решение:

Рассмотрим осевое сечение конуса – равнобедренную трапецию AA_1B_1B.



1) ΔAB_1H: $AH = \sqrt{AB_1^2 - B_1H^2} = \sqrt{289 - 225} = 8$

$AB = AH + HB = 10 \quad \Rightarrow \quad R = 5$

$A_1B_1 = 8 - 2 = 6 \quad \Rightarrow \quad r = 3$

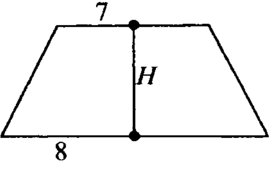
2) $V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) = \frac{1}{3}\pi \cdot 15(25 + 15 + 9) = 245\pi$

Ответ: 245π.

7.3. Усеченный конус, у которого радиусы оснований равны 7 и 8, и полный конус такой же высоты равновелики. Найдите радиус основания полного конуса.

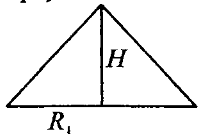
Решение:

1) Рассмотрим осевое сечение усеченного конуса – равнобедренную *трапецию.*



$$V_1 = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + R\cdot r + r^2\right) = \frac{1}{3}\pi H\left(49+56+64\right) = \frac{169\pi H}{3}$$

2) Рассмотрим осевое сечение полного конуса – равнобедренный *треугольник.*



$$V_2 = \frac{1}{3}\pi R_1^2 \cdot H$$

3) $V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{169\pi H}{3} = \frac{1}{3}\pi R_1^2 \cdot H \quad \Rightarrow \quad R_1^2 = 169$

$R_1 = 13$

Ответ: 13.

7.4. Радиусы оснований усеченного конуса равны 9 и 24. Из точки пересечения диагоналей осевого сечения образующая видна под углом $60°$. Найдите боковую поверхность усеченного конуса.

Решение:

AA_1B_1B - осевое сечение конуса

$\angle AKB = \angle A_1KB_1 = 180° - 60° = 120°$

$\angle KAO = \angle KA_1O_1 = \left(180° - 120°\right) : 2 = 30°$

1) В ΔAKO: $AK = \dfrac{AO}{\cos 30^\circ} = 16\sqrt{3}$

2) В ΔA_1O_1K: $A_1K = \dfrac{A_1O_1}{\cos 30^\circ} = 6\sqrt{3}$

3) В ΔAA_1K:

$$AA_1^2 = AK^2 + KA_1^2 - 2AK \cdot KA_1 \cdot \cos 60^\circ = 768 + 108 - 2 \cdot 96 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 588$$

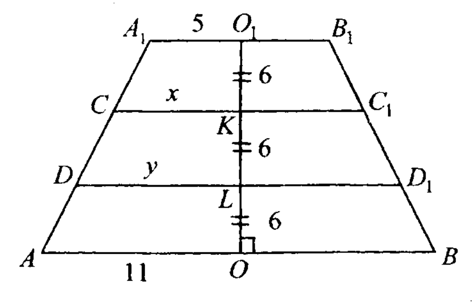
$AA_1 = 14\sqrt{3}$

4) $S_{бок} = \pi L(R + r) = \pi \cdot 14\sqrt{3}(24 + 9) = 462\sqrt{3}\,\pi$

Ответ: $462\sqrt{3}\,\pi$.

7.5. В усеченном конусе высота равна 18 ,а радиусы оснований 5 и 11. Высота разделена на три равные части двумя плоскостями, параллельными основаниям. Определите объем полученной средней части усеченного конуса.

Решение:



AA_1B_1B - осевое сечение конуса. Обозначим: $CK = x$, $DL = y$.

1) Так как CK - средняя линия в трапеции DA_1O_1L :

$$CK=\frac{A_1O+DL}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x=5+y$$

2) DL - средняя линия в трапеции $ACKO$:

$$DL=\frac{CK+AO}{2} \quad \Rightarrow \quad 2y=x+11$$

3) Составим систему уравнений:

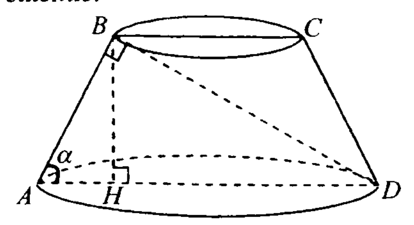
$$\begin{cases} 2x-y=5 \\ x-2y=-11 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x=7, \quad y=9$$

4) $V_{\text{усеч. конуса}}=\frac{1}{3}\pi H\left(R^2+R\cdot r+r^2\right)=\frac{1}{3}\pi\cdot 6\left(7^2+63+9^2\right)=386\pi$

Ответ: 386π.

7.6. Образующая усеченного конуса L составляет с плоскостью нижнего основания угол α и перпендикулярна к прямой, соединяющей верхний конец ее с нижним концом противоположной образующей. Найдите боковую поверхность усеченного конуса.

Решение:



1) ΔABD : $AD=\frac{AB}{\cos\alpha}=\frac{L}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad R=\frac{AD}{2}=\frac{L}{2\cos\alpha}$

2) ΔABH : $AH=L\cdot\cos\alpha$

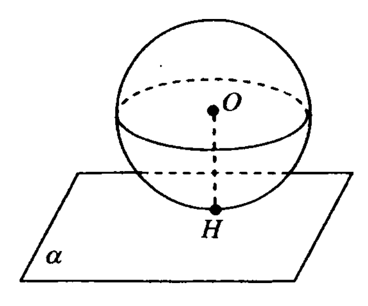
$$r=R-AH=\frac{L}{2\cos\alpha}-L\cdot\cos\alpha=\frac{L}{2\cos\alpha}\left(1-2\cos^2\alpha\right)$$

3) $S_{\text{бок}}=\pi L\left(R+r\right)=\pi L\left(\frac{L}{2\cos\alpha}+\frac{L}{2\cos\alpha}\left(1-2\cos^2\alpha\right)\right)=$

$$=\frac{\pi L^2}{2\cos\alpha}\left(1+1-2\cos^2\alpha\right)=\frac{\pi L^2}{2\cos\alpha}\cdot 2\sin^2\alpha=\pi L^2\sin\alpha\cdot tg\alpha$$

Ответ: $\pi L^2\cdot tg\alpha\cdot\sin\alpha$.

§8. СФЕРА. ШАР



$OH \perp \alpha$

α - касательная плоскость

H - точка касания

Свойства:

1. Сечение шара плоскостью – круг.

2. Сечение сферы плоскостью – окружность.

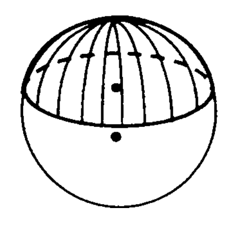
3. Линия пересечения двух сфер есть окружность, плоскость которой перпендикулярна линии центров сфер.

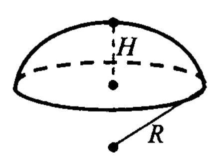
Площадь сферы: $S = 4\pi R^2$

Объем шара: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Части шара

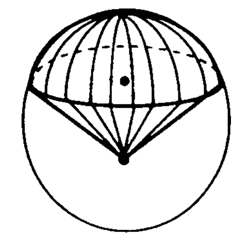
1. Шаровой сегмент

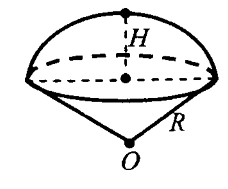




$$V = \frac{1}{3}\pi H^2 (3R - H)$$

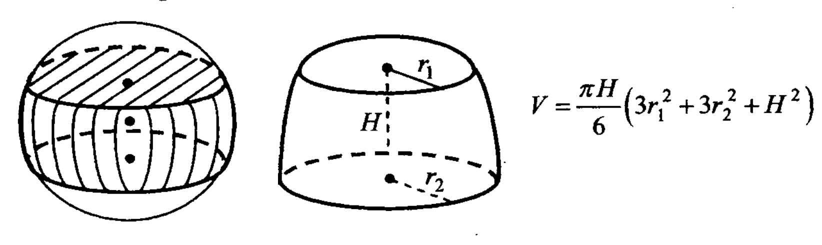
2. Шаровой сектор





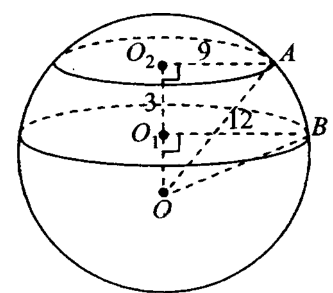
$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$$

3. Шаровой слой



8.1. Дан шар. По одну сторону от его центра проведены два параллельных сечения, радиусы которых равны 9 и 12. Найдите объем шара, если расстояние между плоскостями сечений равно 3.

Решение:



Обозначим: $OO_1 = x$

1) ΔOO_1B: $OB^2 = OO_1^2 + O_1B^2 = x^2 + 12^2$

ΔOO_2A: $OA^2 = OO_2^2 + O_2A^2 = (x+3)^2 + 9^2$

Так как $OB = OA = R$: $x^2 + 12^2 = (x+3)^2 + 9^2$

$x^2 + 144 = x^2 + 6x + 9 + 81$

$6x = 54 \Rightarrow x = 9$, то есть $OO_1 = 9$

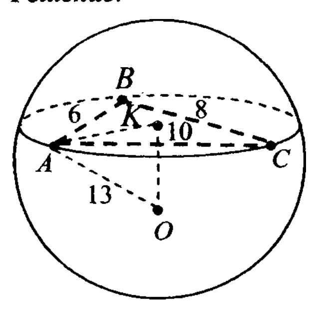
2) $OB = R = \sqrt{OO_1^2 + O_1B^2} = \sqrt{81+144} = 15$

3) $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 15^3 = 4\,500\pi$

Ответ: $4\,500\pi$.

8.2. На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними 6, 8, 10. Радиус шара 13. Найдите расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти три точки.

Решение:



Сечение шара плоскостью, проходящей через три точки A, B и C есть окружность с центром в точке K, причем отрезок OK перпендикулярен плоскости сечения.

$$\Delta ABC: \; S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{12\cdot6\cdot2\cdot4}=24$$

(*формула Герона*)

Радиус описанной около ΔABC окружности:

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{6\cdot8\cdot10}{4\cdot24}=5, \text{ то есть } AK=5.$$

$$\Delta AKO: \; OK=\sqrt{AO^2-AK^2}=\sqrt{169-25}=12.$$

Ответ: 12.

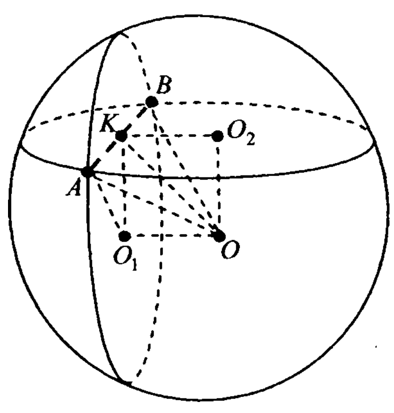
8.3. Радиус шара 7, на его поверхности даны две равные окружности, пересекающиеся по хорде длиной 2. Найдите радиусы этих окружностей, зная, что плоскости их перпендикулярны.

Решение:

1) $\Delta AKO: \quad OK=\sqrt{AO^2-AK^2}=\sqrt{49-1}=4\sqrt{3}$

2) OO_1KO_2 - квадрат.

$$OO_1^2+O_1K^2=OK^2 \;\Rightarrow\; 2\cdot OO_1^2=48 \;\Rightarrow\; OO_1=2\sqrt{6}$$



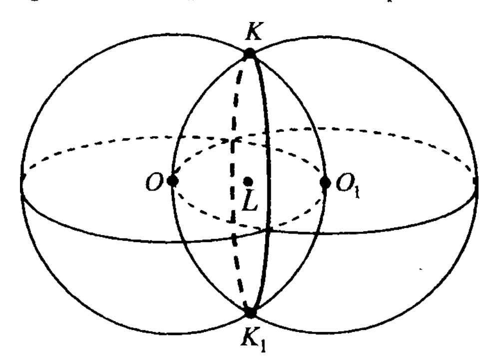
3) ΔOO_1A: $AO_1 = \sqrt{AO^2 - OO_1^2} = \sqrt{49-24} = 5$

Ответ: 5.

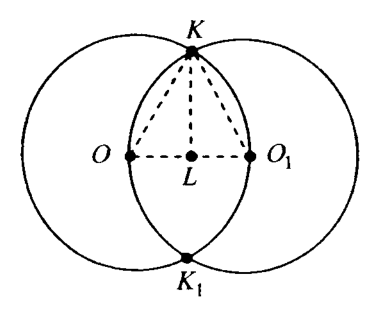
8.4. Два равных шара радиуса R расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Определите длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

Решение:

Линия пересечения двух поверхностей шаров показана на рисунке жирной линией. Это окружность с центром в точке L, проходящая через точки K и K_1.



Рассмотрим сечение фигуры плоскостью, проходящей через точки O, K и O_1.



$OK = OO_1 = O_1K = R \quad \Rightarrow \quad \Delta OKO_1$ - равносторонний

$LK = OK \cdot \sin 60° = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ - радиус окружности, которая является линией пересечения двух поверхностей шаров.

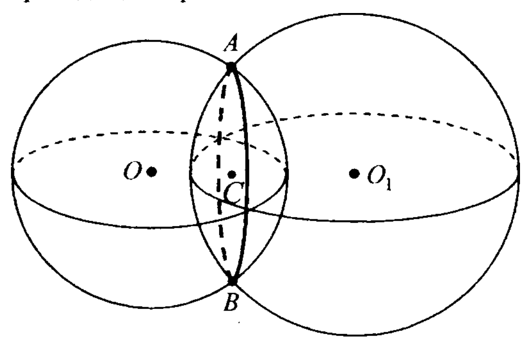
$$C = 2\pi \cdot LK = 2\pi \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \pi R\sqrt{3}$$

Ответ: $\pi R\sqrt{3}$.

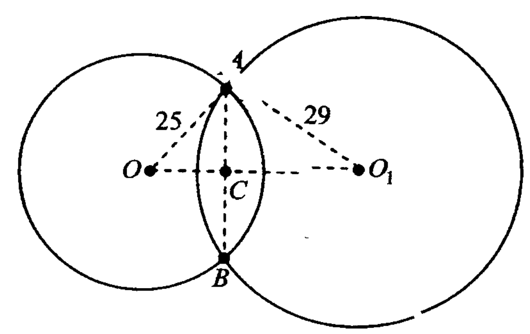
8.5. Радиусы шаров равны 25 и 29, а расстояние между их центрами 36. Найдите длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

Решение:

Линия пересечения двух поверхностей шаров показана на рисунке жирной линией. Это окружность с центром в точке C, проходящая через точки A и B.



Рассмотрим сечение фигуры плоскостью, проходящей через точки O, A и O_1.



1) Обозначим: $OC = x$, тогда $O_1C = 36 - x$

ΔAOC: $AC^2 = AO^2 - OC^2 = 25^2 - x^2$

ΔAO_1C: $AC^2 = AO_1^2 - O_1C^2 = 29^2 - (36 - x)^2$

$25^2 - x^2 = 29^2 - (36 - x)^2$ (метод уравнивания)

$25^2 - x^2 = 29^2 - 36^2 + 72x - x^2$

$25^2 = -7 \cdot 65 + 72x$

$72x = 1080 \Rightarrow x = 15$

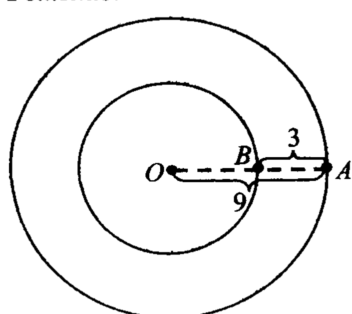
2) ΔAOC: $OC = 15$, $AC = R = \sqrt{AO^2 - OC^2} = \sqrt{400} = 20$

3) $C = 2\pi R = 2\pi \cdot 20 = 40\pi$

Ответ: 40π.

8.6. Внешний диаметр полого шара 18 *см*, толщина стенок 3 *см*. Найдите объем стенок.

Решение:



Рассмотрим сечение полого шара плоскостью, проходящей через центр. Это сечение представляет собой кольцо.

1) $OB = OA - AB = 9 - 3 = 6$

2) $V = V_1 - V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(OA^3 - OB^3\right) = \frac{4}{3}\pi\left(9^3 - 6^3\right) =$

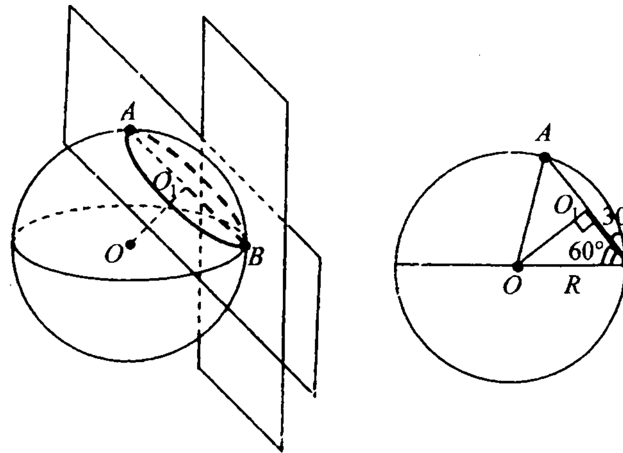
$= \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3\left(3^3 - 2^3\right) = \pi \cdot 36 \cdot 19 = 684\pi$

Ответ: 684π $см^3$.

8.7. Дан шар радиуса R. Через одну точку его поверхности проведены две плоскости: первая – касательная к шару, вторая – под углом $30°$ к первой. Найдите площадь сечения.

Решение:

Рассмотрим сечение шара, проходящее через точки O, A и B.



1) Рассмотрим ΔAOB:

$OA = OB = R$, $\angle OBA = 60°$ $\Rightarrow$ ΔAOB - равносторонний

$O_1B = \frac{1}{2}OB = \frac{R}{2}$

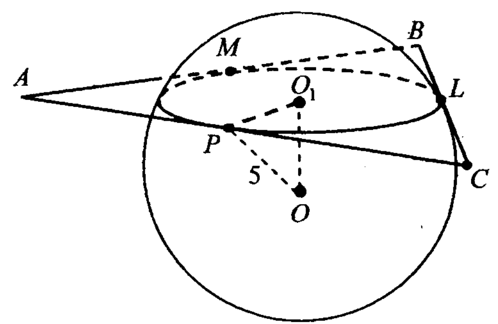
2) $S_{сеч} = \pi \cdot O_1B^2 = \frac{\pi R^2}{4}$

Ответ: $\frac{\pi R^2}{4}$.

8.8. Стороны треугольника 13, 14, 15. Найдите расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касающегося всех сторон треугольника, если радиус шара равен 5.

Решение:

Сечение шара плоскостью треугольника ΔABC - окружность с центром в точке O_1. В задаче требуется найти OO_1.



$OP = 5$ - радиус шара

1) $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$

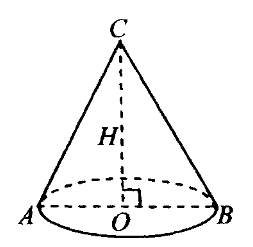
Радиус вписанной в ΔABC окружности: $O_1P = r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{84}{21} = 4$.

2) ΔPOO_1: $OO_1 = \sqrt{OP^2 - O_1P^2} = \sqrt{25-16} = 3$

Ответ: 3.

8.9. Квадрат боковой поверхности медного конуса вдвое больше квадрата площади основания конуса. Высота конуса равна H. Конус перелит в шар. Найдите радиус шара.

Решение:



1) ΔABC - осевое сечение конуса.

$S^2_{\text{бок}} = 2S^2_{\text{осн}}$

$$(\pi R\cdot L)^2=2(\pi R^2)^2 \quad\Rightarrow\quad L^2=2R^2 \quad\Rightarrow\quad L=\sqrt{2}R$$

2) В ΔACO: $AC^2=AO^2+OC^2$

$$L^2=R^2+H^2$$

$$2R^2=R^2+H^2 \quad\Rightarrow\quad R=H$$

3) $V_{кон}=\dfrac{1}{3}\pi R_{кон}^2\cdot H=\dfrac{1}{3}\pi H^3$

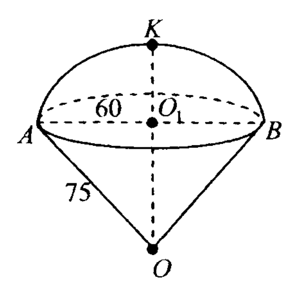
4) Так как объем шара $V_{шара}=\dfrac{4}{3}\pi R^3$ равен объему конуса, то:

$$\frac{\pi H^3}{3}=\frac{4\pi R_{шара}^3}{3} \quad\Rightarrow\quad R_{шара}^3=\frac{H^3}{4} \quad\Rightarrow\quad R_{шара}=\frac{H}{\sqrt[3]{4}}$$

Ответ: $\dfrac{H}{\sqrt[3]{4}}$.

8.10. Чему равен объем шарового сектора, если радиус окружности его основания равен 60 *см*, а радиус шара равен 75 *см*?

Решение:



1) ΔAOO_1:

$$OO_1=\sqrt{AO^2-AO_1^2}=\sqrt{75^2-60^2}=\sqrt{135\cdot 15}=\sqrt{15^2\cdot 9}=45$$

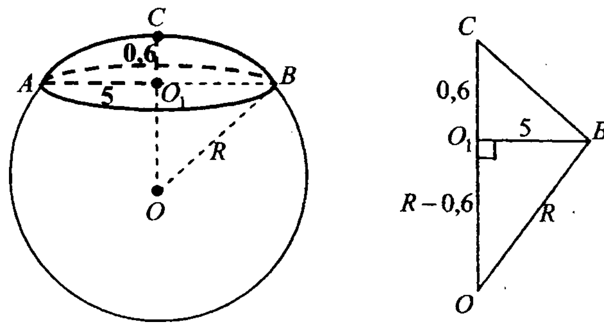
2) $KO_1=KO-OO_1=75-45=30$ - высота шарового сектора

3) $V=\dfrac{2}{3}\pi R_{шара}^2\cdot H=\dfrac{2}{3}\pi\cdot 75^2\cdot 30=112500\pi\,(см^3)=112{,}5\pi\,(дм^3)$

Ответ: $112{,}5\pi$ $дм^3$.

8.11. Сколько кубометров земли потребуется для устройства клумбы, имеющей форму шарового сегмента с радиусом основания 5 *м* и высотой 60 *см*?

Решение:



Рассмотрим осевое сечение.

1) В ΔOO_1B: $OB^2 = OO_1^2 + O_1B^2$

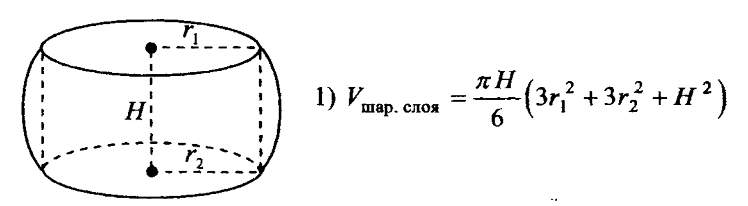
$$R^2 = (R-0,6)^2 + 5^2 \Rightarrow 1,2R = 25,36 \Rightarrow R = \frac{317}{15}$$

$$2)\ V = \frac{1}{3}\pi H^2(3R-H) = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{9}{25}\left(3\cdot\frac{317}{15} - \frac{3}{5}\right) = \frac{3\pi}{25}\cdot\frac{314}{5} = \frac{942\pi}{125}\left(м^3\right)$$

Ответ: $\frac{942\pi}{125}$ $м^3$.

8.12. Шаровой слой и цилиндр имеют общую высоту и общие основания. Объем тела, заключенного между их боковыми поверхностями, равен 36π. Найдите их высоту.

Решение:



1) $V_{\text{шар. слоя}} = \frac{\pi H}{6}\left(3r_1^2 + 3r_2^2 + H^2\right)$

Цилиндр не может иметь основания с разными радиусами, тогда:

$$r_1 = r_2 = r \Rightarrow V_{\text{шар. слоя}} = \frac{\pi H}{6}\left(6r^2 + H^2\right)$$

2) $V_{цил} = \pi \cdot r^2 \cdot H$

3) $V_{шар. слоя} - V_{цил} = 36\pi$

$$\pi H \cdot r^2 + \frac{\pi H^3}{6} - \pi H \cdot r^2 = 36\pi$$

$H^3 = 216 \quad \Rightarrow \quad H = 6$

Ответ: 6.

§9. ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКИХ ФИГУР

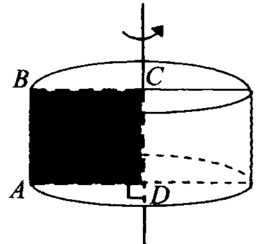
В данном разделе рассматриваются фигуры вращения, то есть фигуры, полученные при вращении некоторой плоской фигуры вокруг прямой, принадлежащей той же плоскости.

Для решения данных задач достаточно иметь изображение осевого сечения.

9.1. Прямоугольник со сторонами $\sqrt{\frac{3}{\pi}}$ и $\sqrt{\frac{27}{\pi}}$ вращается вокруг меньшей стороны. Найдите площадь полной поверхности фигуры вращения.

Решение:

Фигура вращения – цилиндр с радиусом основания $\sqrt{\frac{27}{\pi}}$ и высотой $\sqrt{\frac{3}{\pi}}$.



$$S_{\text{полн. цилин.}} = 2\pi R(R+H) = 2\pi \cdot BC(BC+AB) =$$

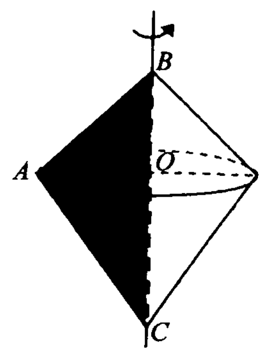
$$= 2\pi \cdot 3\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \left(3\sqrt{\frac{3}{\pi}} + \sqrt{\frac{3}{\pi}}\right) = 6\pi \cdot \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot 4\sqrt{\frac{3}{\pi}} = 72$$

Ответ: 72.

9.2. В треугольнике ABC сторона $BC = a$, и известны углы B и C. Определите объем тела, полученного при вращении треугольника около данной стороны.

Решение:

Фигура вращения – два конуса с общим основанием радиуса AO и высотами BO и OC.



1) В ΔABC: $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$

По теореме синусов: $\dfrac{BC}{\sin\angle A} = \dfrac{AC}{\sin\angle B}$.

$$AC = \frac{a\cdot\sin\angle B}{\sin\left(180° - (\angle B + \angle C)\right)} = \frac{a\cdot\sin\angle B}{\sin(\angle B + \angle C)}$$

2) В ΔAOC: $AO = AC\cdot\sin\angle C = \dfrac{a\cdot\sin\angle B\cdot\sin\angle C}{\sin(\angle B + \angle C)}$

3) Обозначим:

V_1 - объем конуса с высотой BO;

V_2 - объем конуса с высотой OC.

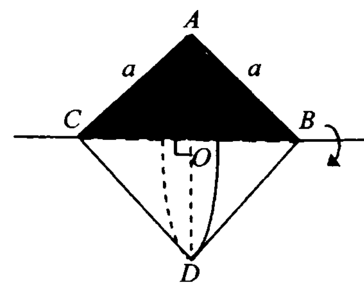
$$V_{\text{тела. вращ.}} = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi\cdot AO^2\cdot BO + \frac{1}{3}\pi\cdot AO^2\cdot OC =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\cdot AO^2\cdot(BO + OC) = \frac{1}{3}\pi\cdot AO^2\cdot BC = \frac{\pi\cdot a^3\sin^2\angle B\cdot\sin^2\angle C}{3\sin^2(\angle B + \angle C)}$$

Ответ: $\dfrac{\pi\cdot a^3\sin^2\angle B\cdot\sin^2\angle C}{3\sin^2(\angle B + \angle C)}$.

9.3. Боковая сторона равнобедренного треугольника a, угол при вершине α. Треугольник вращается вокруг основания. Найдите объем тела вращения.

Решение:



1) В ΔABC: $\angle CAO = \frac{\alpha}{2}$; $CO = AC\sin\frac{\alpha}{2} = a\sin\frac{\alpha}{2}$;

$AO = AC\cos\frac{\alpha}{2} = a\cos\frac{\alpha}{2}$.

2) $V_{\text{тела. вращ.}} = 2V_{\text{кон.}} = 2\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot AO^2\cdot CO = \frac{2}{3}\pi\cdot a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot a\sin\frac{\alpha}{2} =$

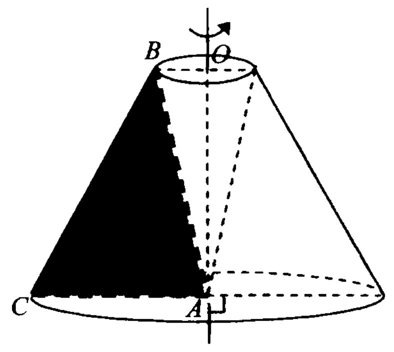
$= \frac{1}{3}\pi\cdot a^3\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$

Ответ: $\frac{1}{3}\pi\cdot a^3\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$.

9.4. Треугольник со сторонами 8 и 5, заключающими угол в $60°$, вращается вокруг оси, проходящей через вершину данного угла, перпендикулярно к меньшей из данных сторон. Найдите площадь поверхности полученной фигуры вращения.

Решение:

По условию: $AB = 8$, $AC = 5$, $\angle A = 60°$



$S_{\text{тела. вращ.}} = S_{\text{бок. пов. кон.}} + S_{\text{бок. пов. усеч. кон.}} + S_{\text{круга}}$

1) ΔABC:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60° = 25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2} = 49$$

(*по теореме косинусов*)

$BC = 7$

2) ΔBAO: $\angle BAO = 30° \quad \Rightarrow \quad OB = \frac{1}{2} AB = 4$

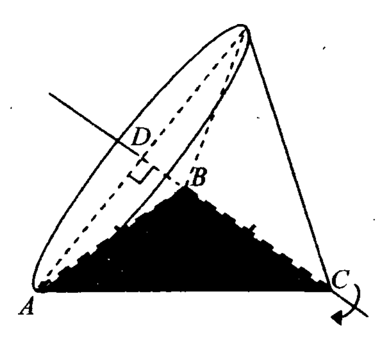
3) $S_{\text{тела. вращ.}} = \pi \cdot OB \cdot AB + \pi \cdot BC \cdot (OB + AC) + \pi \cdot AC^2 =$

$= \pi \cdot 4 \cdot 8 + \pi \cdot 7(4+5) + \pi \cdot 25 = 32\pi + 63\pi + 25\pi = 120\pi$

Ответ: 120π.

9.5. Равнобедренный треугольник с углом при вершине $120°$ и боковой стороной a вращается вокруг боковой стороны. Определите объем тела вращения.

Решение:



1) ΔADB: $\angle ABD = 60°$; $AD = AB \cdot \sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

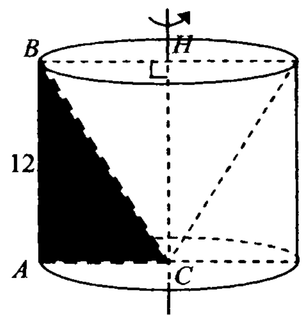
2) $V_{\text{тела. вращ.}} = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot AD^2 \cdot DC - \frac{1}{3}\pi \cdot AD^2 \cdot BD =$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot AD^2 (DC - DB) = \frac{1}{3}\pi \cdot AD^2 \cdot BC = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot a = \frac{\pi \cdot a^3}{4}$$

Ответ: $\frac{\pi \cdot a^3}{4}$.

9.6. Прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12 вращается вокруг прямой, проходящей через вершину большего острого угла параллельно противолежащему катету. Найдите площадь поверхности образовавшегося тела.

Решение:



1) ΔABC: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 13$

2) $S_{\text{тела. вращ.}} = S_{\text{бок. пов. цил.}} + S_{\text{бок. пов. кон.}} + S_{\text{круга}} =$

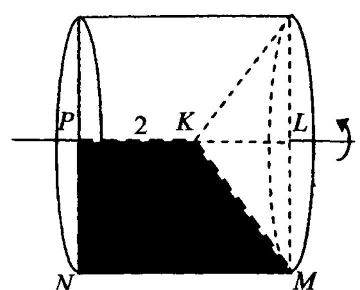
$= 2\pi\, AC \cdot AB + \pi\, BH \cdot BC + \pi\, AC^2 = 2\pi \cdot 5 \cdot 12 + \pi \cdot 5 \cdot 13 + \pi \cdot 5^2 =$

$= \pi \cdot 5(24 + 13 + 5) = 5\pi \cdot 42 = 210\pi$

Ответ: 210π.

9.7. Прямоугольная трапеция $NPKM$ $(MN \parallel KP$ и $\angle N = 90°)$ вращается вокруг оси, содержащей сторону KP. Найдите объем фигуры вращения, если $KP = 2$, диагональ $MP = 6$ и $\angle MPK = 60°$.

Решение:



1) В ΔPMN:

$MN = \frac{1}{2} PM = 3$ (по свойству катета, лежащего против угла $30°$)

$PN = \sqrt{PM^2 - MN^2} = \sqrt{36-9} = 3\sqrt{3}$

2) $KL = 3 - 2 = 1$

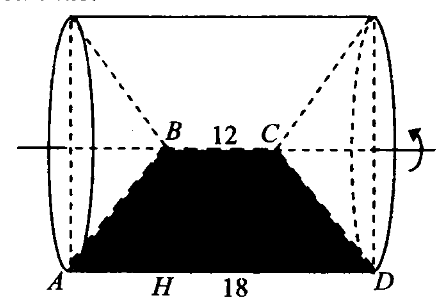
3) $V_{\text{тела. вращ.}} = V_{\text{цилин.}} - V_{\text{кон.}} = \pi \cdot PN^2 \cdot MN - \frac{\pi}{3} \cdot ML^2 \cdot KL =$

$= \pi\left(27 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 27 \cdot 1\right) = \pi \cdot 27 \cdot \frac{8}{3} = 72\pi$

Ответ: 72π.

9.8. Равнобедренная трапеция с основаниями 12 и 18 и острым углом в $60°$ вращается вокруг меньшего основания. Найдите поверхность и объем тела вращения.

Решение:



1) $ABCD$ - равнобедренная трапеция.

$AH = \frac{AD - BC}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} AB = 2AH = 6 \\ BH = AB \cdot \sin 60° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \end{array} \right.$

$BH = 3\sqrt{3} = R$ - радиус основания

2) $S_{\text{тела. вращ.}} = S_{\text{бок. пов. цилин.}} + 2 \cdot S_{\text{бок. пов. кон.}} =$

$= 2\pi \cdot BH \cdot AD + 2\pi \cdot BH \cdot AB = 2\pi \cdot BH(AD + AB) =$

$= 2\pi \cdot 3\sqrt{3}(18+6) = 144\sqrt{3}\pi$

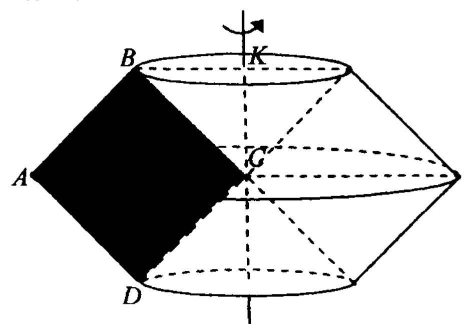
3) $V_{\text{тела. вращ.}} = V_{\text{цилин.}} - 2 \cdot V_{\text{кон.}} = \pi \cdot BH^2 \cdot AD - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot BH^2 \cdot AH =$

$$= \pi \cdot BH^2 \left(AD - \frac{2}{3} AH \right) = \pi \cdot \left(3\sqrt{3} \right)^2 \left(18 - \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = 27\pi \cdot 16 = 432\pi$$

Ответ: $S = 144\sqrt{3}\pi$; $V = 432\pi$.

9.9. Ромб с большей диагональю d и острым углом α вращается вокруг оси, проходящей через вершину ромба и перпендикулярной к большей его диагонали. Определите объем тела вращения.

Решение:



По условию: $AC = d$; $\angle C = \alpha$.

Поскольку фигура вращения симметрична относительно прямой, содержащей AC :

$$V_{\text{тела. вращ.}} = 2\left(V_{\text{усеч. кон.}} - V_{\text{кон.}} \right).$$

$$OC = \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad BO = OC \cdot tg\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2} tg\frac{\alpha}{2}$$

$$V_{\text{усеч. кон.}} = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + R \cdot r + r^2 \right) = \frac{1}{3}\pi\, BO\left(AC^2 + BK^2 + AC \cdot BK \right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{d}{2} tg\frac{\alpha}{2} \left(d^2 + \frac{d^2}{4} + d \cdot \frac{d}{2} \right) = \frac{7}{24}\pi \cdot d^3 tg\frac{\alpha}{2}$$

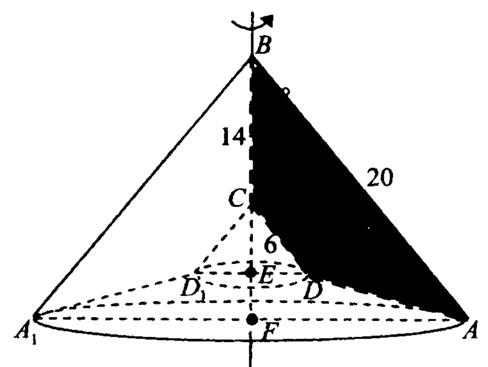
$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H = \frac{1}{3}\pi \cdot BK^2 \cdot KC = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot \frac{d}{2} tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{24}\pi \cdot d^3\, tg\frac{\alpha}{2}$$

$$V_{\text{тела. вращ.}} = 2\left(\frac{7}{24}\pi \cdot d^3\, tg\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{24}\pi \cdot d^3\, tg\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{2} d^3\, tg\frac{\alpha}{2}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} d^3\, tg\frac{\alpha}{2}$.

9.10. Равнобедренная трапеция с острым углом в $30°$ вращается вокруг оси, проходящей через ее боковую сторону. Вычислите поверхность тела вращения, если основания и боковая сторона трапеции соответственно равны 6, 20 и 14.

Решение:



Поверхность тела вращения складывается из боковых поверхностей конусов ABA_1, DCD_1 и боковой поверхности усеченного конуса ADD_1A_1.

1) В ΔABA_1:

$AB = A_1B$; $\angle ABF = \angle A_1BF = 30° \quad \Rightarrow \quad \angle ABA_1 = 60°$

Таким образом, ΔABA_1 - равносторонний и $AF = \frac{1}{2} AB = 10$.

2) Аналогично для ΔDCD_1: $DE = \frac{1}{2} CD = 3$.

3) $S_1 = \pi \cdot AF \cdot AB = \pi \cdot 10 \cdot 20 = 200\pi$

$S_2 = \pi \cdot DE \cdot CD = \pi \cdot 3 \cdot 6 = 18\pi$

$S_3 = \pi(AF + DE) \cdot AD = \pi(10+3) \cdot 14 = 182\pi$

$S_{\text{тела. вращ.}} = S_1 + S_2 + S_3 = 200\pi + 18\pi + 182\pi = 400\pi$

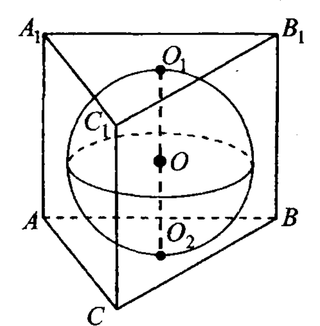
Ответ: 400π.

§10. КОМБИНАЦИИ МНОГОГРАННИКОВ И ФИГУР ВРАЩЕНИЯ

В тестах часто встречаются задачи по стереометрии с комбинацией различных фигур. Для решения таких задач необходимо хорошо представлять себе взаимное расположение тел в пространстве и уметь четко выполнять чертеж. Наибольшие трудности с чертежом, как правило, возникают в тех случаях, когда одно из тел является шаром. Для решения таких задач иногда достаточно только указать центр шара и точки его касания с различными плоскостями и прямыми.

Призма и шар

1. Шар вписан в призму, если он касается всех граней призмы. В любом случае диаметр шара равен высоте призмы.



$r_{\text{шара}} = OO_1 = OO_2$

Высота призмы: $O_1O_2 = 2r_{\text{шара}}$

Проекция шара на плоскость основания – вписанная в треугольник ABC окружность радиуса $r_{\text{шара}}$.

Если шар вписан в цилиндр, то радиус основания цилиндра равен $r_{\text{шара}}$.

10.1. В правильную треугольную призму вписан шар. Найдите отношение площади сферы этого шара к площади полной поверхности призмы.

Решение:

Обозначим радиус шара через R.

Высота призмы равна диаметру шара, то есть $2R$.

Если через центр O шара провести плоскость, параллельную основаниям призмы, то в сечении призмы получится равносторонний треугольник KLM.

$$R=\frac{a}{2\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad KL=2\sqrt{3}R$$

$$S_{\text{полн. призмы}}=3KL\cdot H+2\frac{KL^2\sqrt{3}}{4}=3\cdot 2\sqrt{3}R\cdot 2R+2\cdot\frac{12R^2\sqrt{3}}{4}=$$

$$=12\sqrt{3}R^2+6\sqrt{3}R^2=18\sqrt{3}R^2$$

$$S_{\text{сферы}}=4\pi R^2$$

Искомое отношение равно: $\frac{4\pi R^2}{18\sqrt{3}R^2}=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$

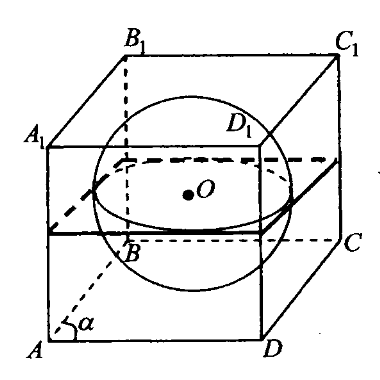
Ответ: $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

10.2. Основание прямого параллелепипеда – ромб с острым углом α. В параллелепипед вписана сфера радиуса R. Найдите объем параллелепипеда.

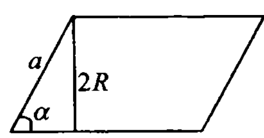
Решение:

1) $AA_1=2R$

Если через центр O шара провести плоскость, параллельную основаниям параллелепипеда, то в сечении параллелепипеда получится ромб.



2) $\sin\alpha = \dfrac{2R}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{2R}{\sin\alpha}$ (сторона ромба)



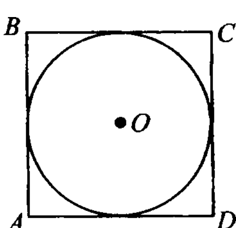
3) $V = S_{осн} \cdot H = a^2 \sin\alpha \cdot 2R = \dfrac{4R^2}{\sin^2\alpha}\sin\alpha \cdot 2R = \dfrac{8R^3}{\sin\alpha}$

Ответ: $\dfrac{8R^3}{\sin\alpha}$.

10.3. Вокруг шара описан цилиндр. Найдите отношение их объемов.

Решение:

Квадрат $ABCD$ - осевое сечение цилиндра.



Обозначим: $AB = a$. $\quad R_{шара} = \dfrac{a}{2}, \quad R_{цилин.} = \dfrac{a}{2}$.

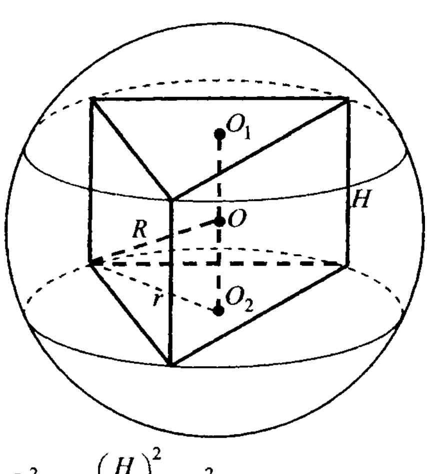
$$V_{\text{цилин.}} = \pi R^2_{\text{цилин.}} \cdot H = \pi \cdot \frac{a^2}{4} \cdot a = \frac{\pi a^3}{4}$$

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{a^3}{8} = \frac{\pi a^3}{6}$$

$$V_{\text{шара}} : V_{\text{цилин.}} = \frac{\pi a^3}{6} : \frac{\pi a^3}{4} = \frac{2}{3}$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

2. Шар можно описать около призмы, если она прямая и ее основания являются многоугольниками, вписанными в окружность. Центр шара лежит на середине высоты призмы, соединяющей центры окружностей, описанных около оснований призмы.



$$R^2_{\text{шара}} = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2_{\text{осн}}, \text{ где}$$

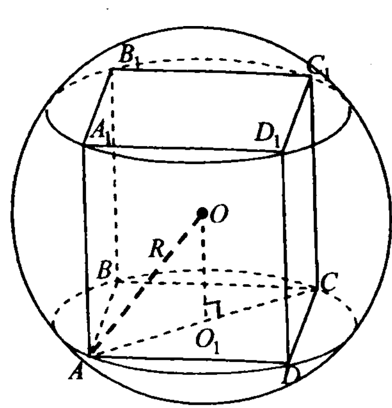
$r_{\text{осн}}$ - радиус окружности, описанной около основания призмы;

H - высота призмы.

10.4. Около куба описан шар радиуса R. Найдите объем части шара, находящейся вне куба.

Решение:

Обозначим ребро куба через a.



1) ΔAOO_1: $\quad OO_1 = \frac{1}{2}CC_1 = \frac{a}{2}; \quad O_1A = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$AO^2 = AO_1^2 + O_1O^2$ (теорема Пифагора)

$$R^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad R^2 = \frac{3a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

2) $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R_{\text{шара}}^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$V_{\text{куба}} = a^3 = \frac{8R^3}{3\sqrt{3}}$$

$$V = V_{\text{шара}} - V_{\text{куба}} = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{8R^3}{3\sqrt{3}} = \frac{4R^3}{3}\left(\pi - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

Ответ: $\frac{4R^3}{3}\left(\pi - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

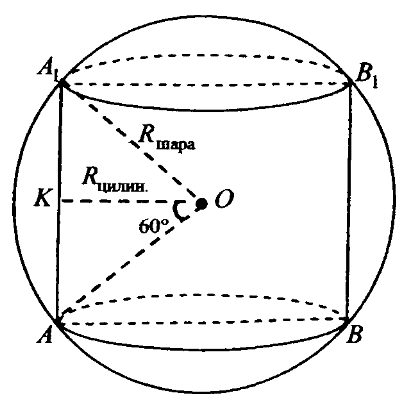
10.5. Около цилиндра описан шар. Площадь основания цилиндра равна 9π. Угол между отрезками, проведенными из центра шара к концам образующей цилиндра, равен $120°$. Найдите площадь поверхности шара.

Решение:

1) $S_{\text{осн}} = 9\pi$

$9\pi = \pi R_{\text{цилин.}}^2$

$R_{\text{цилин.}} = 3$



2) В ΔAKO: $OK = R_{цилин.} = 3$; $\angle KOA = 60°$; $\angle KAO = 30°$.

$R_{шара} = AO = 2OK = 6$ (свойство катета, лежащего против угла $30°$)

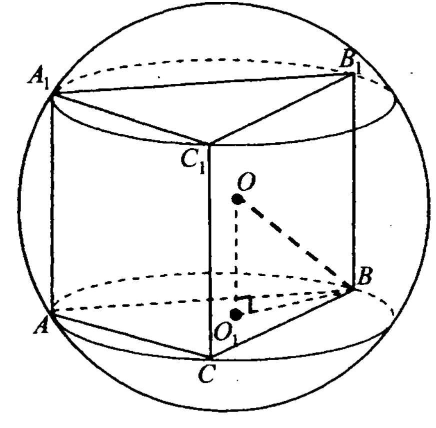
3) $S_{шара} = 4\pi R^2_{шара} = 4\pi \cdot 36 = 144\pi$

Ответ: 144π.

10.6. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 6, 8, 10. Высота призмы 24. Найдите объем описанного шара.

Решение:

Пусть $AC = 6$, $BC = 8$, $AB = 10$.



1) Для сторон треугольника ABC выполняется теорема Пифагора: $6^2+8^2=10^2$. Следовательно, ΔABC - прямоугольный с гипотенузой $AB=10$.

Тогда $R_{осн}=O_1B=\dfrac{AB}{2}=5$

2) В ΔOO_1B: $OO_1=\dfrac{1}{2}BB_1=12$

$R_{шара}=OB=\sqrt{OO_1^2+O_1B^2}=\sqrt{144+25}=13$

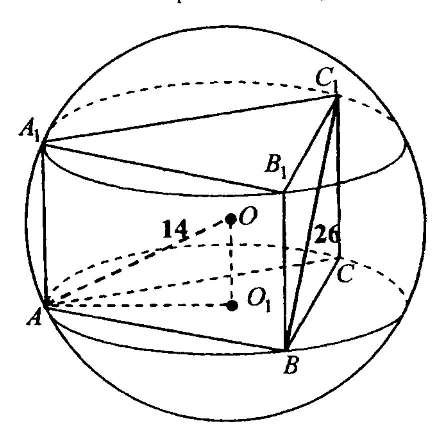
$V_{шара}=\dfrac{4}{3}\pi R_{шара}^3=\dfrac{4}{3}\pi\cdot 2197=\dfrac{8\,788}{3}\pi$

Ответ: $\dfrac{8\,788}{3}\pi$.

10.7. В шар, радиус которого 14, вписана правильная треугольная призма; диагональ ее боковой грани равна 26. Найдите боковую поверхность этой призмы.

Решение:

Обозначим: $OO_1=x$, $BC=y$



1) В ΔBCC_1: $BC_1^2=BC^2+CC_1^2 \Rightarrow 4x^2+y^2=676$

2) ΔAOO_1: $AO_1 = R_{осн} = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{y}{\sqrt{3}}$ (как радиус описанной окружности в равностороннем треугольнике)

$$AO^2 = AO_1^2 + O_1O^2 \Rightarrow \frac{y^2}{3} + x^2 = 196$$

3) $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 676 \\ \frac{y^2}{3} + x^2 = 196 \end{cases}$ $-\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 676 \\ 3x^2 + y^2 = 588 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = 88 \\ y^2 = 324 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2\sqrt{22} \\ y = 18 \end{cases}$

Таким образом, $OO_1 = 2\sqrt{22}$, $BC = 18$.

$CC_1 = 2OO_1 = 4\sqrt{22}$ (так как центр шара лежит на середине высоты призмы)

4) $S_{бок} = P_{осн} \cdot H = 3 \cdot 18 \cdot 4\sqrt{22} = 216\sqrt{22}$

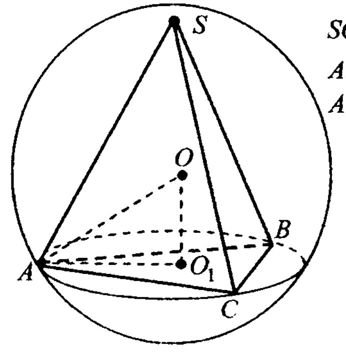
Ответ: $216\sqrt{22}$.

Пирамида и шар

3. Шар называется описанным около пирамиды, если все вершины пирамиды лежат на его поверхности.

Шар можно описать около любой правильной пирамиды.

Из множества всех пирамид, которые можно вписать в шар, рассмотрим те, у которых все боковые ребра равны. В таких пирамидах боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания. У этих пирамид высота пересекает основание в центре описанной окружности и центр описанного шара лежит на высоте пирамиды или на ее продолжении за плоскость основания.



$SO_1 = H$ - высота пирамиды

$AS = l$ - боковое ребро пирамиды

$AO = R_{шара}$ - радиус шара

$\angle SAO_1 = \alpha$ - угол наклона бокового ребра к плоскости основания пирамиды

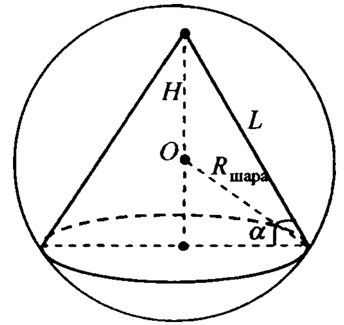
Уравнения связи для вписанной в шар пирамиды, у которой все боковые ребра равны:

$l = 2R_{\text{шара}} \sin\alpha$

$l^2 = 2R_{\text{шара}} \cdot H$

Для конуса, вписанного в шар, имеют место те же соотношения, что и для пирамиды, вписанной в шар.

Рассмотрим конус, вписанный в шар.



Уравнения связи для конуса, вписанного в шар:

$L = 2R_{\text{шара}} \sin\alpha$

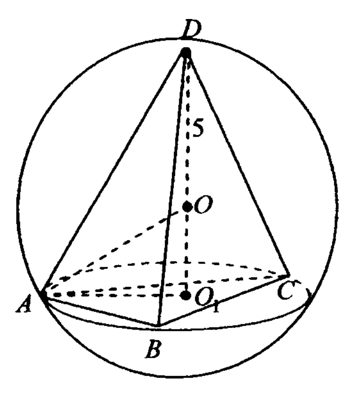
$L^2 = 2R_{\text{шара}} \cdot H$

В задачах на комбинации пирамиды и шара решение, как правило, необходимо начинать с геометрического построения, в результате которого находится точка, являющаяся центром шара. Кроме того, часто бывает удобно построить вспомогательное сечение пирамиды и шара, разбивающее комбинацию фигур на две симметричные части. В результате этого шага решение стереометрической задачи сводится к решению планиметрической задачи.

10.8. В правильной треугольной пирамиде высота равна 5, а боковое ребро относится к стороне основания как $2:3$. Найдите радиус описанного шара.

Решение:

Обозначим: $AD = 2x$, $AB = 3x$



1) ΔABC - равносторонний; $AO_1 = R_{осн} = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}x$

2) ΔADO_1: $AD^2 = AO_1^2 + O_1D^2$

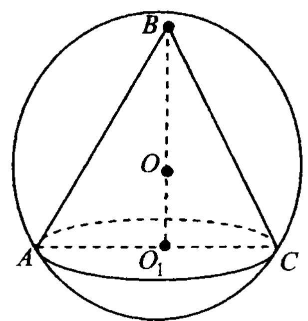
$4x^2 = 3x^2 + 25 \quad \Rightarrow \quad x = 5$

3) $AD = 10 \quad \Rightarrow \quad R_{шара} = \dfrac{l^2}{2H} = \dfrac{100}{10} = 10$

Ответ: 10.

10.9. В шар вписан конус, образующая которого равна диаметру основания. Найдите отношение поверхности этого конуса к поверхности шара.

Решение:



1) ΔABC - равносторонний; $AB = AC = 2R_{конуса}$.

$BO_1 = \sqrt{AB^2 - AO_1^2} = \sqrt{4R_{конуса}^2 - R_{конуса}^2} = \sqrt{3}R_{конуса}$

2) $R_{\text{шара}} = BO = \frac{2}{3} BO_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} R_{\text{конуса}}$

3) $S_{\text{полн. конуса}} = \pi R_{\text{конуса}} \left(L + R_{\text{конуса}} \right) =$

$= \pi R_{\text{конуса}} \cdot 3R_{\text{конуса}} = 3\pi R_{\text{конуса}}^2$

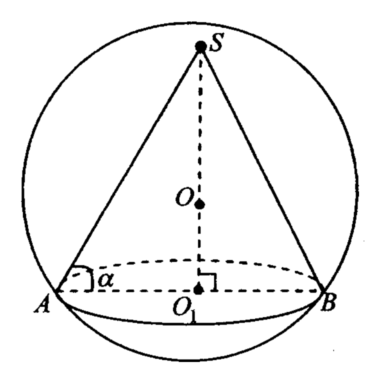
$$S_{\text{шара}} = 4\pi R_{\text{шара}}^2 = 4\pi \cdot \frac{4R_{\text{конуса}}^2}{3} = \frac{16\pi R_{\text{конуса}}^2}{3}$$

$$\frac{S_{\text{конуса}}}{S_{\text{шара}}} = \frac{3\pi R_{\text{конуса}}^2}{\frac{16\pi R_{\text{конуса}}^2}{3}} = \frac{9}{16}$$

Ответ: $\frac{9}{16}$.

10.10. В шар вписан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите полную поверхность конуса, если поверхность шара равна Q.

Решение:



1) $S_{\text{шара}} = 4\pi R_{\text{шара}}^2 \quad \Rightarrow \quad Q = 4\pi R_{\text{шара}}^2$

$$R_{\text{шара}} = \sqrt{\frac{Q}{4\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$$

2) $L = 2R_{\text{шара}} \sin\alpha = \sqrt{\frac{Q}{\pi}} \sin\alpha$

3) ΔASO_1 : $AO_1 = R_{\text{конуса}} = AS \cdot \cos\alpha = \sqrt{\frac{Q}{\pi}} \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

4) $S_{\text{полн. конуса}} = \pi R_{\text{конуса}} \left(L + R_{\text{конуса}}\right) =$

$$= \pi \sqrt{\frac{Q}{\pi}} \sin\alpha \cdot \cos\alpha \left(\sqrt{\frac{Q}{\pi}} \sin\alpha + \sqrt{\frac{Q}{\pi}} \sin\alpha \cdot \cos\alpha \right) =$$

$$= Q \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \left(1 + \cos\alpha\right) = Q \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

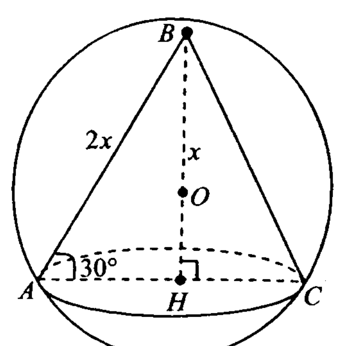
Ответ: $Q \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

10.11. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом $30°$. Площадь осевого сечения конуса равна 75. Найдите площадь поверхности шара, описанного около конуса.

Решение:

$S_{\Delta ABC} = 75$

Пусть $BH = x$, тогда $AB = 2x$; $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{3}x$.



1) $S_{\Delta ABC} = BH \cdot AH$

$75 = \sqrt{3}x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{75}{\sqrt{3}} = 25\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x = 5 \cdot \sqrt[4]{3}$

2) $AB = L = 10 \cdot \sqrt[4]{3}$; $BH = H = 5 \cdot \sqrt[4]{3}$

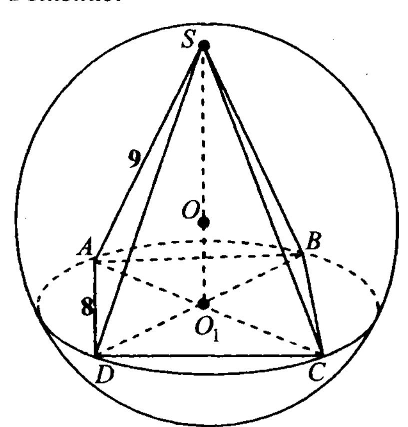
$R_{\text{шара}} = \frac{L^2}{2H} = \frac{100\sqrt{3}}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt[4]{3}} = 10 \cdot \sqrt[4]{3}$

$$S_{шара} = 4\pi\ R^2_{шара} = 4\pi \cdot 100\sqrt{3} = 400\pi\sqrt{3}$$

Ответ: $400\pi\sqrt{3}$.

10.12. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания и боковое ребро соответственно равны 8 и 9. Определите радиус описанного шара.

***Решение*:**



1) $ABCD$ - квадрат, следовательно:

$$DB = BC\sqrt{2} = 8\sqrt{2}\ ; \quad DO_1 = \frac{1}{2}DB = 4\sqrt{2}$$

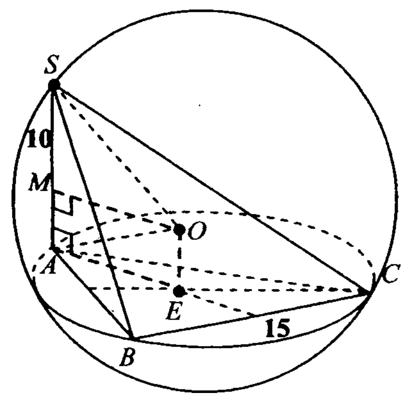
2) В ΔSO_1D: $SO_1 = \sqrt{SD^2 - DO_1^2} = \sqrt{81-32} = 7$

3) $R_{шара} = \dfrac{SD^2}{2SO_1} = \dfrac{81}{2\cdot 7} = \dfrac{81}{14}$

Ответ: $\dfrac{81}{14}$.

10.13. Основанием пирамиды служит правильный треугольник, сторона которого равна 15. Одно из боковых ребер равно 10 и перпендикулярно к основанию. Найдите радиус описанного шара.

***Решение*:**



1) В ΔABC: $AE = R_{\Delta ABC} = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = \dfrac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$.

2) Рассмотрим ΔASO: $OA = OS = R_{\text{шара}}$

ΔASO - равнобедренный. Построим $OM \perp AS$.

Так как в равнобедренном треугольнике высота является так же медианой: $AM = MS = 5$.

Значит, $AMOE$ - прямоугольник и $OE = 5$.

3) В ΔAOE: $OA = R_{\text{шара}} = \sqrt{OE^2 + AE^2} = \sqrt{25+75} = 10$

Ответ: 10.

4. Шар называется вписанным в пирамиду, если он касается всех граней пирамиды.

Шар можно вписать в любую правильную пирамиду.

Рассмотрим пирамиду, у которой все боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания. В такой пирамиде высота падает в центр вписанной в основание окружности и высоты всех боковых граней равны.

Шар касается основания пирамиды в центре вписанной окружности, а боковых граней – в точках, принадлежащих высотам боковых граней.

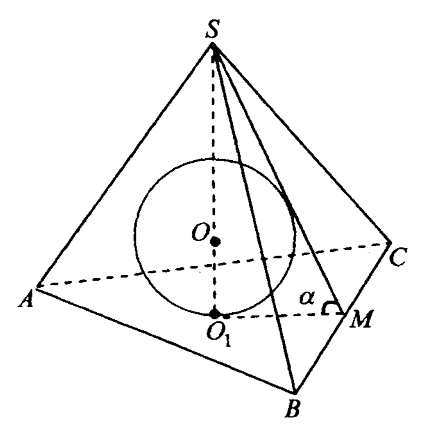
$SO_1 = H$ - высота пирамиды

$OO_1 = r_{\text{шара}}$ - радиус шара

$SM = m$ - апофема

$\angle SMO_1 = \alpha$ - двугранный угол при основании

$O_1M = r$ - радиус вписанной в основание окружности

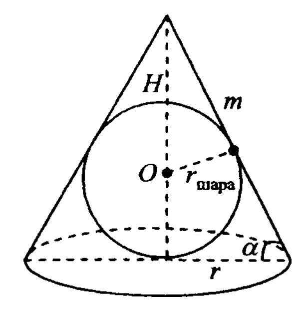


Уравнения связи для шара, вписанного в пирамиду, у которой все боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания:

$$r_{\text{шара}} = r \cdot tg\frac{\alpha}{2}; \qquad r_{\text{шара}} = \frac{H \cdot r}{r+m}.$$

Для шара, вписанного в конус, имеют место соотношения, аналогичные тем, которые были получены для шара вписанного в пирамиду.

Рассмотрим шар, вписанный в конус.



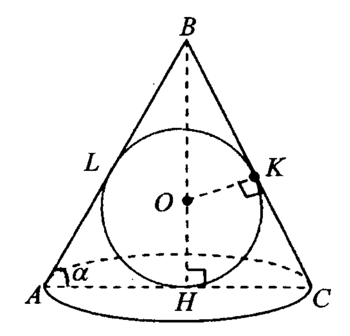
Уравнения связи для шара, вписанного в конус:

$$r_{\text{шара}} = r \cdot tg\frac{\alpha}{2}; \qquad r_{\text{шара}} = \frac{H \cdot r}{r+m}.$$

10.14. В конус вписан шар. Найдите объем шара, если образующая конуса равна L и наклонена к плоскости основания под углом α.

Решение:

O - центр шара, вписанного в конус.



1) ΔABH: $AH = AB \cdot \cos\alpha = L\cos\alpha$

2) $r_{\text{шара}} = r \cdot tg\frac{\alpha}{2} = AH \cdot tg\frac{\alpha}{2} = L\cos\alpha \cdot tg\frac{\alpha}{2}$

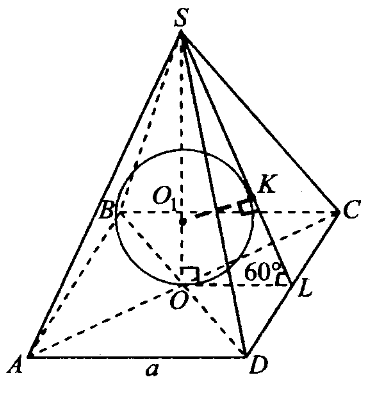
3) $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi \cdot r_{\text{шара}}^3 = \frac{4}{3}\pi L^3 \cos^3\alpha \cdot tg^3\frac{\alpha}{2}$

Ответ: $\frac{4}{3}\pi L^3 \cos^3\alpha \cdot tg^3\frac{\alpha}{2}$.

10.15. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен $60°$. Найдите поверхность вписанного шара.

Решение:

O_1 - центр шара, вписанного в пирамиду.



1) $r_{\text{шара}} = r \cdot tg\dfrac{\alpha}{2} = OL \cdot tg30^\circ = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

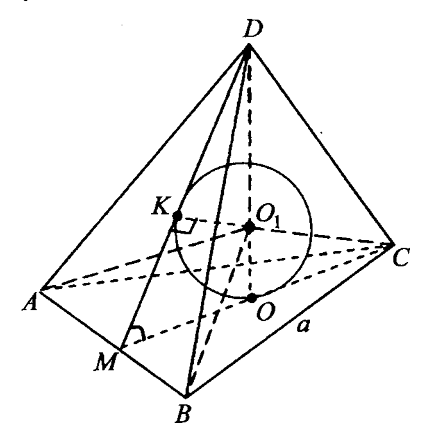
2) $S_{\text{шара}} = 4\pi \cdot r_{\text{шара}}^2 = 4\pi \cdot \dfrac{a^2 \cdot 3}{36} = \dfrac{\pi a^2}{3}$

Ответ: $\dfrac{\pi a^2}{3}$.

10.16. Найдите радиус сферы, вписанной в правильный тетраэдр с ребром a.

Решение:

O_1 - центр вписанного шара.



1) ΔABC - равносторонний $\Rightarrow$ $OC = R = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

2) ΔDOC: $DO = H = \sqrt{DC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = a\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

3) Соединив точку O_1 с вершинами тетраэдра A, B, C и D, мы разобьем тетраэдр на четыре равные пирамиды:

$ABCO_1$; $ADBO_1$; $ADCO_1$ и $BDCO_1$.

В каждой из этих пирамид в основании лежит равносторонний треугольник, а высота равна радиусу вписанного шара $\left(O_1K = r_{\text{шара}}\right)$.

Тогда объем тетраэдра можно выразить как :

$$V_{ABCD} = 4 \cdot V_{ABCO_1} = 4 \cdot \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot r_{\text{шара}}$$

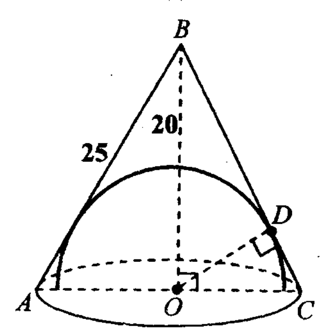
4) С другой стороны: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot H$

$$\frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot H = 4 \cdot \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot r_{\text{шара}} \quad \Rightarrow \quad r_{\text{шара}} = \frac{H}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{6}}{12}$.

10.17. Высота конуса 20, образующая 25. Найдите радиус вписанного полушара, основание которого лежит на основании конуса.

Решение: Найдем OD.



1) В ΔABO: $AO=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{625-400}=15$.

2) $S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}BO\cdot OC=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 15=150$

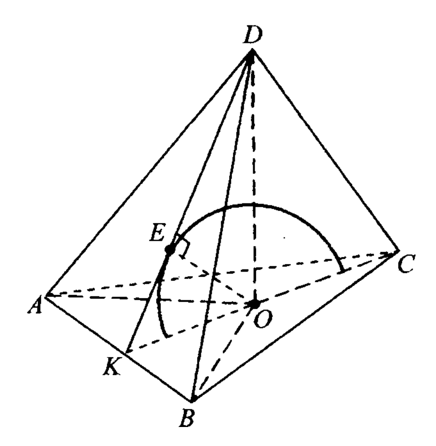
$S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}OD\cdot BC=\frac{1}{2}OD\cdot 25$

$150=\frac{1}{2}OD\cdot 25 \quad \Rightarrow \quad OD=12$

Ответ: 12.

10.18. Ребро правильного тетраэдра равно a. Чему равен радиус полусферы, касающейся боковых граней тетраэдра, центр которой лежит на основании тетраэдра?

Решение:



1) ΔABC: $OC=R=\frac{a}{\sqrt{3}}$

2) ΔDOC: $OD=H=\sqrt{DC^2-OC^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=a\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

3) Соединив точку O с вершинами тетраэдра A, B, C и D, мы разобьем тетраэдр на три равные пирамиды:

$ADBO$; $ADCO$ и $BDCO$.

В каждой из этих пирамид в основании лежит равносторонний треугольник, а высота равна радиусу вписанного полушара $\left(OE = r_{\text{шара}}\right)$.

Тогда объем тетраэдра можно выразить как :

$$V_{ABCD} = 3 \cdot V_{ADBO} = 3 \cdot \frac{1}{3} S_{\Delta ADB} \cdot r_{\text{шара}}$$

4) С другой стороны: $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{\Delta ADB} \cdot H$

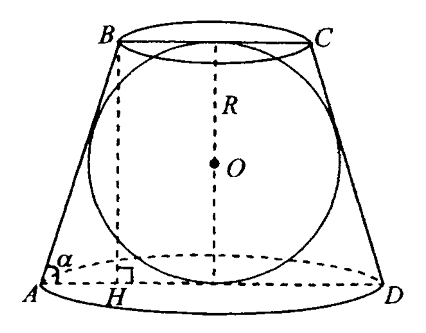
$$\frac{1}{3} S_{\Delta ADB} \cdot H = 3 \cdot \frac{1}{3} S_{\Delta ADB} \cdot r_{\text{шара}} \quad \Rightarrow \quad r_{\text{шара}} = \frac{H}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{9}$$

Ответ: $\frac{a\sqrt{6}}{9}$.

10.19. В усеченный конус вписан шар радиуса R. Образующая конуса наклонена к основанию под углом α. Найдите боковую поверхность конуса.

Решение:

$$S_{\text{бок}} = \pi L\left(R_{\text{кон.}} + r_{\text{кон.}}\right)$$



1) ΔABH : $BH = 2R_{\text{шара}} = 2R$;

$$L = AB = \frac{BH}{\sin\alpha} = \frac{2R}{\sin\alpha}.$$

2) Так как в сечении получается, что равнобедренная трапеция $ABCD$ описана около окружности, имеет место соотношение:

$$BC + AD = 2AB\ .$$

$$2r_{\text{кон.}} + 2R_{\text{кон.}} = 2L \quad \Rightarrow \quad r_{\text{кон.}} + R_{\text{кон.}} = L$$

3) $S_{\text{бок}} = \pi L\left(R_{\text{кон.}} + r_{\text{кон.}}\right) = \pi L^2 = \dfrac{4\pi R^2}{\sin^2\alpha}$

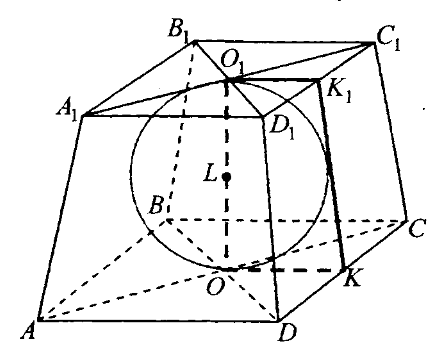
Ответ: $\dfrac{4\pi R^2}{\sin^2\alpha}$.

10.20. Около шара описана правильная усеченная четырехугольная пирамида, у которой длины сторон оснований относятся, как $m:n$. Определите отношение объемов усеченной пирамиды и шара.

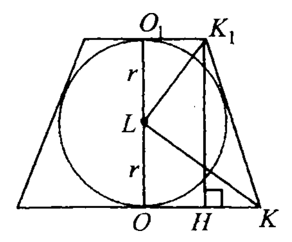
Решение:

Обозначим: $AD = mx$, $A_1D_1 = nx$, $O_1L = r$,

где L - центр вписанного шара



1) $OK = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{mx}{2}$; $\quad O_1K_1 = \dfrac{1}{2}A_1D_1 = \dfrac{nx}{2}$.



2) Поскольку в трапецию можно вписать окружность:

$$2KK_1 = 2O_1K_1 + 2OK;$$

$$KK_1 = O_1K_1 + OK = \frac{x}{2}(m+n).$$

3) В ΔK_1HK : $K_1H = h_{\text{пир}} = 2r$; $HK = OK - O_1K_1 = \dfrac{mx - nx}{2}$.

$$K_1K^2 = K_1H^2 + HK^2 = (2r)^2 + \left(\frac{mx-nx}{2}\right)^2 = 4r^2 + \frac{x^2}{4}(m-n)^2$$

4) Применим метод уравнивания:

$$\frac{x^2}{4}(m+n)^2 = 4r^2 + \frac{x^2}{4}(m-n)^2$$

$$\frac{x^2}{4} \cdot 4mn = 4r^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{4r^2}{mn}$$

5) В основаниях усеченной пирамиды квадраты $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ со сторонами mx и nx соответственно, следовательно:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}h_{\text{пир}}\left(S_{ABCD} + S_{A_1B_1C_1D_1} + \sqrt{S_{ABCD} \cdot S_{A_1B_1C_1D_1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2r\left(m^2x^2 + n^2x^2 + x^2mn\right)$$

6) $$\frac{V_{\text{пир}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 2r\left(m^2x^2 + n^2x^2 + x^2mn\right)}{\frac{4}{3}\pi \cdot r^3} = \frac{rx^2\left(m^2 + n^2 + mn\right)}{2\pi \cdot r^3} =$$

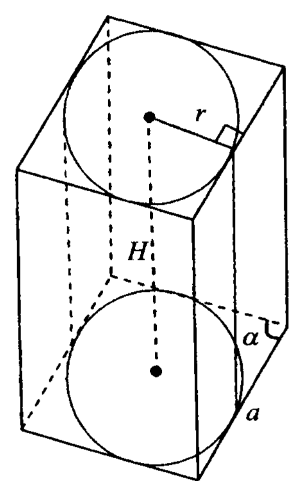
$$= \frac{\frac{4r^2}{mn}\left(m^2 + n^2 + mn\right)}{2\pi \cdot r^2} = \frac{2\left(m^2 + n^2 + mn\right)}{\pi \cdot mn}$$

Ответ: $\dfrac{2\left(m^2 + n^2 + mn\right)}{\pi \cdot mn}$.

Рассмотрим комбинацию призмы и цилиндра.

10.21. Основанием прямого параллелепипеда является ромб, один из углов которого равен α. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в данный параллелепипед, если площадь боковой поверхности параллелепипеда равна S.

Решение:



Обозначим сторону ромба через a (вспомогательный элемент).

1) $S_{\text{бок. пов. парал.}} = S = 4a \cdot H \quad \Rightarrow \quad H = \dfrac{S}{4a}$

2) $S_{\text{ромба}} = a^2 \sin\alpha$; $\quad S_{\text{ромба}} = h_{\text{ромба}} \cdot a = 2r \cdot a$.

Применим метод уравнивания:

$a^2 \sin\alpha = 2ra \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{a \sin\alpha}{2}$

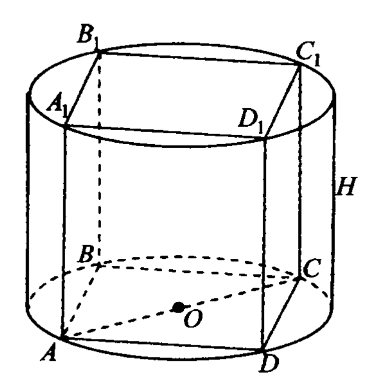
3) $S_{\text{бок. пов. цилин.}} = 2\pi \cdot r \cdot H = 2\pi \dfrac{a \sin\alpha}{2} \cdot \dfrac{S}{4a} = \dfrac{\pi \cdot S \sin\alpha}{4}$

Ответ: $\dfrac{\pi \cdot S \sin\alpha}{4}$.

10.22. Около куба описан цилиндр. Найдите полную площадь поверхности цилиндра, если поверхность куба равна S.

Решение:

$$S_{\text{полн. пов. цилин.}} = 2\pi R\left(R + H\right)$$



1) Обозначим: $AD = H$.

$$S_{\text{куба}} = 6H^2 = S \quad \Rightarrow \quad H = \sqrt{\frac{S}{6}}$$

2) $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{2 \cdot \frac{S}{6}} = \sqrt{\frac{S}{3}} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{3}}$

3) $S_{\text{полн. пов. цилин.}} = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{3}} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{3}} + \sqrt{\frac{S}{6}}\right) =$

$$= \pi\sqrt{\frac{S}{3}} \cdot \sqrt{\frac{S}{3}}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\pi S}{3}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right) = \frac{\pi S\left(1+\sqrt{2}\right)}{6}$$

Ответ: $\dfrac{\pi S\left(1+\sqrt{2}\right)}{6}$.

Глава X

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Тема «Координаты и векторы» имеет большое прикладное значение для решения геометрических задач, а также задач из других областей математики.

Метод координат является самым универсальным методом геометрии. И тестовые задания включают несколько задач, в которых метод координат предпочтительней других методов (речь идет о тех заданиях, условие которых не содержит упоминание о координатах).

§1. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ

Прямоугольная декартова система координат на плоскости

Координаты середины отрезка:

$$C\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

Расстояние между двумя точками:

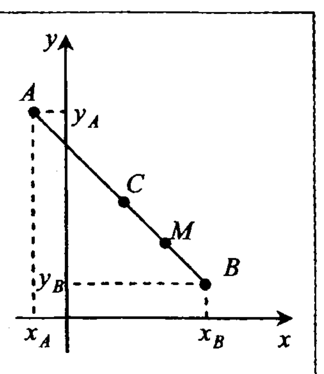
$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

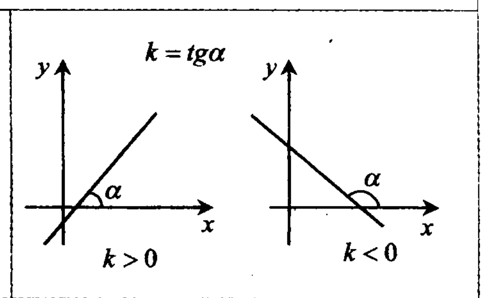
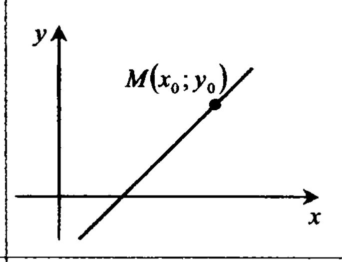
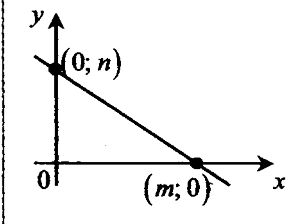
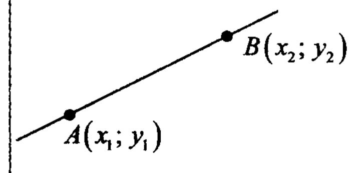
Координаты точки, делящей отрезок AB в отношении λ:

$$\frac{AM}{MB}=\lambda \quad \Rightarrow \quad M\left(\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda};\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}\right)$$

$$\frac{AM}{MB}=\frac{m}{n}$$

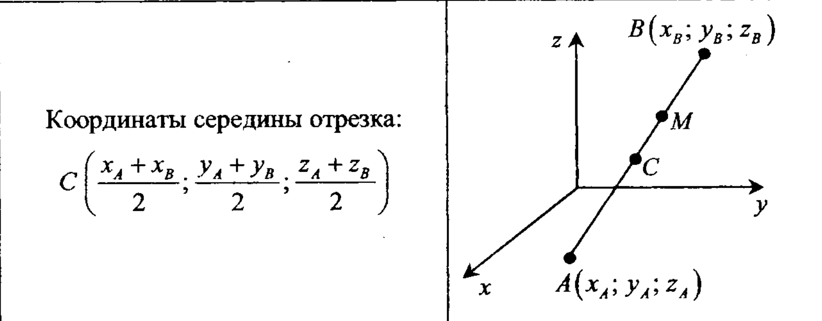
$$M\left(\frac{n}{m+n}x_A+\frac{m}{m+n}x_B;\ \frac{n}{m+n}y_A+\frac{m}{m+n}y_B\right)$$



Уравнение прямой	
Общее уравнение прямой: $ax+by+c=0 \quad \left(a^2+b^2\neq 0\right)$	
Уравнение прямой *с угловым коэффициентом* k: $y=kx+b$	
Уравнение прямой, *проходящей через точку* $M\left(x_0;\,y_0\right)$ с угловым коэффициентом k: $y=y_0+k\left(x-x_0\right)$	
Уравнение прямой *в отрезках на осях*: $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ $\left(m\neq 0,\ n\neq 0\right)$	
Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A\left(x_1;\,y_1\right)$ и $B\left(x_2;\,y_2\right)$: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$	

Условие параллельности двух прямых	$k_1 = k_2$
Условие перпендикулярности двух прямых	$k_1 \cdot k_2 = -1$
Расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой $ax + by + c = 0$	$\dfrac{\lvert ax_0 + by_0 + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
Уравнение окружности	
С центром в начале координат	$x^2 + y^2 = r^2, \quad r > 0$
С центром в точке $M(x_0; y_0)$	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \quad r > 0$

Прямоугольная декартова система координат в пространстве



Координаты середины отрезка:

$$C\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Расстояние между двумя точками:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

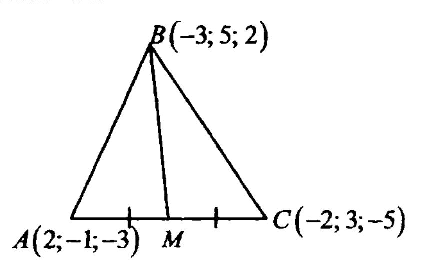
Координаты точки M, делящей отрезок AB в отношении λ:

$$\frac{AM}{MB} = \lambda \quad \Rightarrow \quad M\left(\frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}; \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}; \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda}\right)$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n} \Rightarrow M\left(\frac{n}{m+n}x_A + \frac{m}{m+n}x_B; \ \frac{n}{m+n}y_A + \frac{m}{m+n}y_B; \ \frac{n}{m+n}z_A + \frac{m}{m+n}z_B\right)$$

1.1. Известны координаты вершин треугольника $A(2;-1;-3)$, $B(-3;5;2)$, $C(-2;3;-5)$. BM – медиана треугольника ABC. Найдите длину BM.

Решение:



Найдем координаты точки M - середины отрезка AC:

$$M\left(\frac{2-2}{2};\ \frac{-1+3}{2};\ \frac{-3-5}{2}\right)$$

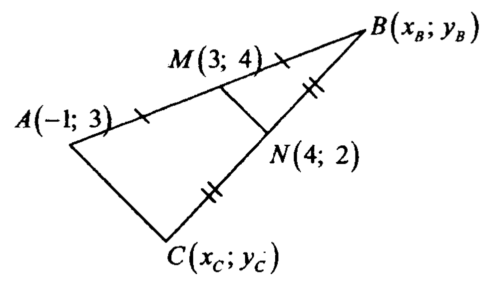
$$M(0;1;-4)$$

$$BM=\sqrt{(-3-0)^2+(5-1)^2+(2+4)^2}=\sqrt{61}$$

Ответ: $\sqrt{61}$.

1.2. В треугольнике ABC MN – средняя линия, $M\in AB$, $N\in BC$. Найдите координаты точек B и C, если $A(-1;\ 3)$, $M(3;\ 4)$, $N(4;\ 2)$.

Решение:



Обозначим координаты точки $B(x_B;\ y_B)$.

M – середина отрезка AB $\Rightarrow$ $3=\dfrac{-1+x_B}{2}$, $4=\dfrac{3+y_B}{2}$.

Тогда $x_B=7$, $y_B=5$; $B(7;5)$.

Аналогично находим координаты точки $C(x_C;y_C)$:

$$4=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{7+x_C}{2} \Rightarrow x_C=1$$

$$2=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{5+y_C}{2} \Rightarrow y_C=-1$$

$C(1;-1)$.

Ответ: $B(7;5)$, $C(1;-1)$.

1.3. Найдите периметр ΔMNP, если $M(4;0)$, $N(12;-2)$, $P(5;-9)$.

Решение:

Найдем длины сторон треугольника:

$$MN=\sqrt{(4-12)^2+(0+2)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$$

$$NP=\sqrt{(12-5)^2+(-2+9)^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$$

$$MP=\sqrt{(4-5)^2+(0+9)^2}=\sqrt{82}$$

$$P_{\Delta MNP}=2\sqrt{17}+7\sqrt{2}+\sqrt{82}$$

Ответ: $2\sqrt{17}+7\sqrt{2}+\sqrt{82}$.

1.4. На прямой $x+2y-1=0$ найдите точку, равноудаленную от точек $(-2;5)$ и $(0;1)$.

Решение:

$A(-2;5)$

$C(x_C;y_C)$

$B(0;1)$

$x+2y-1=0$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_C + 2y_C - 1 = 0 \\ (-2 - x_C)^2 + (5 - y_C)^2 = (0 - x_C)^2 + (1 - y_C)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_C + 2y_C - 1 = 0 \\ 4 + 4x_C + x_C^2 + 25 - 10y_C + y_C^2 = x_C^2 + 1 - 2y_C + y_C^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_C + 2y_C - 1 = 0 \\ x_C - 2y_C + 7 = 0 \end{cases}$$

$x_C = -3, \quad y_C = 2.$

Ответ: $(-3;\ 2)$.

1.5. Точки $C(4;1;-1)$ и $D(0;5;5)$ делят отрезок AB на три равные части. Найдите длину отрезка AB.

Решение:

$C(4;1;-1)$ $D(0;5;5)$

$A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$

1) Найдем координаты точки $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$.

Т.к. точка C - середина отрезка AD, ее координаты:

$$4 = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{x_A + 0}{2} \quad \Rightarrow \quad x_A = 8$$

$$1 = \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{y_A + 5}{2} \quad \Rightarrow \quad y_A = -3$$

$$-1 = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{z_A + 5}{2} \quad \Rightarrow \quad z_A = -7$$

$A(8;-3;-7)$

2) D - середина отрезка CB $\Rightarrow$ координаты точки $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$:

$$0 = \frac{4 + x_B}{2} \quad \Rightarrow \quad x_B = -4$$

$$5=\frac{1+y_B}{2} \quad \Rightarrow \quad y_B=9$$

$$5=\frac{-1+z_B}{2} \quad \Rightarrow \quad z_B=11$$

$B(-4;9;11)$

3) Длина отрезка:

$$AB=\sqrt{(8+4)^2+(-3-9)^2+(-7-11)^2}=\sqrt{612}=6\sqrt{17}.$$

Ответ: $6\sqrt{17}$.

1.6. Точка B делит отрезок AC в отношении $4:3$. Найдите координаты точки B, если $A(-1;3;2)$, $C(4;13;12)$.

Решение:

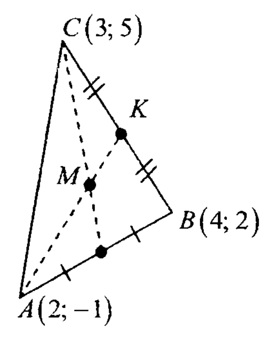
$$\frac{AB}{BC}=\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad B\left(\frac{3}{7}\cdot(-1)+\frac{4}{7}\cdot 4;\ \frac{3}{7}\cdot 3+\frac{4}{7}\cdot 13;\ \frac{3}{7}\cdot 2+\frac{4}{7}\cdot 12\right)$$

$$B\left(\frac{13}{7};\frac{61}{7};\frac{54}{7}\right)$$

Ответ: $B\left(\frac{13}{7};\frac{61}{7};\frac{54}{7}\right)$.

1.7. Найдите координаты центра тяжести треугольника, заданного своими вершинами: $A(2;-1)$, $B(4;2)$, $C(3;5)$.

Решение:



1) Найдем координаты точки K - середины стороны BC:

$$K\left(\frac{4+3}{2};\ \frac{2+5}{2}\right) \Rightarrow K(3,5;\ 3,5)$$

2) Центр тяжести треугольника – точка пересечения медиан данного треугольника.

Зная, что $\frac{AM}{MK}=2$, найдем координаты точки M:

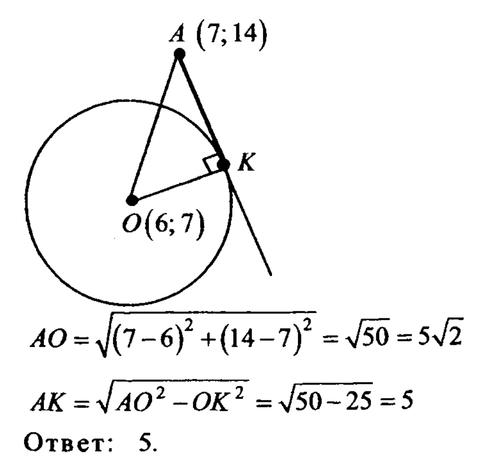
$$M\left(\frac{x_A+2x_K}{1+2};\ \frac{y_A+2y_K}{1+2}\right)$$

$$M\left(\frac{2+2\cdot 3,5}{3};\ \frac{-1+2\cdot 3,5}{3}\right); \quad M(3;2)$$

Ответ: $(3;2)$.

1.8. Дана окружность с центром в точке $O(6;7)$ и радиусом $r=5$. Из точки $A(7;14)$ к этой окружности проведена касательная. Найдите ее длину.

Решение:



$$AO=\sqrt{(7-6)^2+(14-7)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

$$AK=\sqrt{AO^2-OK^2}=\sqrt{50-25}=5$$

Ответ: 5.

1.9. Найдите расстояние от точки $M(1;-2)$ до прямой $2x+y+3=0$.

Решение:

$M(1;-2)$

d

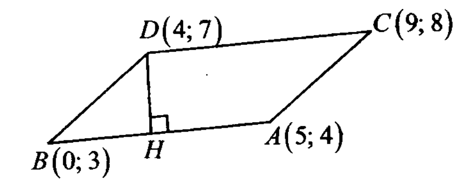
$2x+y+3=0$

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2\cdot1+1\cdot(-2)+3|}{\sqrt{4+1}}=\frac{3}{\sqrt5}=0,6\sqrt5$$

Ответ: $0,6\sqrt5$.

1.10. Найдите площадь параллелограмма $ABDC$: $A(5;4)$, $B(0;3)$, $D(4;7)$, $C(9;8)$.

Решение:



1) Составим уравнение прямой AB:

$$\frac{x-5}{0-5}=\frac{y-4}{3-4}\quad\Rightarrow\quad\frac{x-5}{-5}=\frac{y-4}{-1}\quad\Rightarrow\quad x-5y+15=0$$

2) $AB=\sqrt{(5-0)^2+(4-3)^2}=\sqrt{26}$

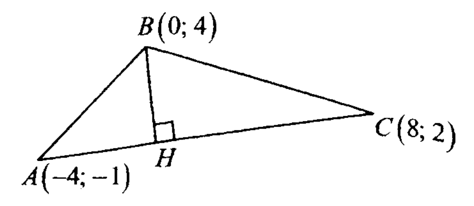
3) $DH=\dfrac{|1\cdot4-5\cdot7+15|}{\sqrt{1+25}}=\dfrac{16}{\sqrt{26}}$

4) $S=DH\cdot AB=\sqrt{26}\cdot\dfrac{16}{\sqrt{26}}=16$

Ответ: 16.

1.11. Найдите площадь треугольника ABC: $A(-4;-1)$, $B(0;4)$, $C(8;2)$.

Решение:



1) Составим уравнение прямой AC:

$$\frac{x+4}{8+4}=\frac{y+1}{2+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+4}{12}=\frac{y+1}{3} \quad \Rightarrow \quad x-4y=0$$

2) $AC=\sqrt{(-4-8)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{153}=3\sqrt{17}$

3) $BH=\frac{|1\cdot 0+4\cdot(-4)+0|}{\sqrt{1+16}}=\frac{16}{\sqrt{17}}$

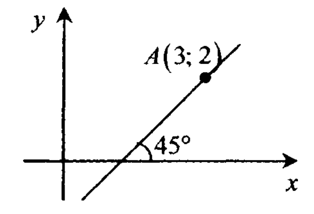
4) $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BH\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{\sqrt{17}}\cdot 3\sqrt{17}=24$

Ответ: 24.

Задачи на аналитическую запись линий на плоскости

1.12. Составьте уравнение прямой, изображенной на рисунке.

Решение:



$k=tg45°=1$

По формуле уравнения прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом имеем:

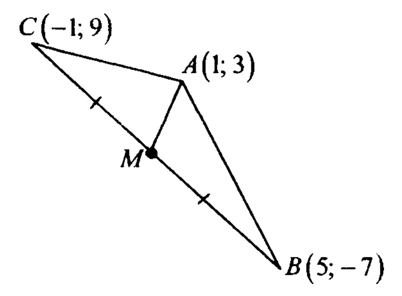
$y=2+1(x-3)$

$y=x-1$

Ответ: $y=x-1$.

1.13. Треугольник ABC задан своими вершинами $A(1;3)$, $B(5;-7)$, $C(-1;9)$. Составьте уравнение прямой, содержащей медиану AM треугольника.

Решение:



1) Найдем координаты точки M - середины отрезка BC:

$$M\left(\frac{5-1}{2};\ \frac{-7+9}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad M(2;1)$$

2) Для составления уравнения медианы, воспользуемся формулой уравнения прямой проходящей через две точки $A(1;3)$ и $M(2;1)$:

$$\frac{y-3}{1-3}=\frac{x-1}{2-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-3}{-2}=\frac{x-1}{1} \quad \Rightarrow \quad y-3=-2x+2$$

$$y=-2x+5$$

Ответ: $y=-2x+5$.

1.14. Составьте уравнение прямой, параллельной прямой $y-2x+5=0$ и проходящей через точку $A(3;-1)$.

Решение:

Перепишем уравнение данной прямой в виде $y=2x-5$.

Из условия параллельности прямых, следует, что угловой коэффициент искомой прямой будет равен 2.

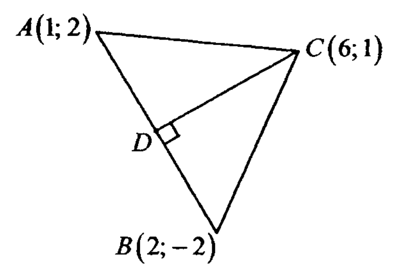
Используя формулу уравнения прямой с заданным угловым коэффициентом, найдем:

$$y=-1+2(x-3) \quad \Rightarrow \quad y=2x-7$$

Ответ: $y=2x-7$.

1.15. Треугольник ABC задан координатами своих вершин $A(1;2)$, $B(2;-2)$, $C(6;1)$. Составьте уравнение высоты CD.

Решение:



1) Найдем уравнение прямой AB:

$$\frac{y-2}{-2-2}=\frac{x-1}{2-1} \quad\Rightarrow\quad \frac{y-2}{-4}=\frac{x-1}{1} \quad\Rightarrow\quad y-2=-4x+4$$

$$y=-4x+6$$

2) Из условия перпендикулярности прямых, найдем угловой коэффициент k искомой прямой CD:

$$k\cdot(-4)=-1 \quad\Rightarrow\quad k=\frac{1}{4}$$

3) Составим уравнение прямой CD, используя угловой коэффициент и точку C:

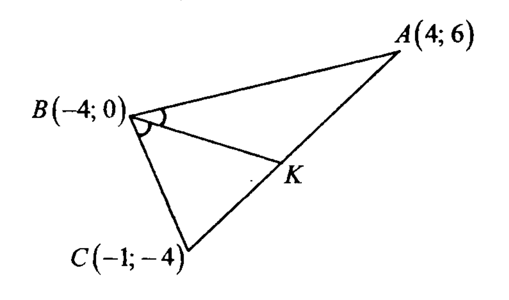
$$y=1+\frac{1}{4}(x-6)$$

$$y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2} \quad \text{или} \quad x-4y-2=0$$

Ответ: $x-4y-2=0$.

1.16. Даны вершины треугольника: $A(4;6)$, $B(-4;0)$, $C(-1;-4)$. Составьте уравнение биссектрисы угла B.

Решение:



1) $AB=\sqrt{(4+4)^2+(6-0)^2}=10$

$BC=\sqrt{(-4+1)^2+(0+4)^2}=5$

2) По свойству биссектрисы: $\frac{AB}{BC}=\frac{AK}{KC}=\frac{10}{5}=2$

3) $K\left(\frac{4+2\cdot(-1)}{3};\ \frac{6+2\cdot(-4)}{3}\right) \Rightarrow K\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$

4) Уравнение прямой BK:

$$\frac{x+4}{\frac{2}{3}+4}=\frac{y-0}{-\frac{2}{3}-0} \Rightarrow x+7y+4=0$$

Ответ: $x+7y+4=0$.

1.17. При каком k точки $A(2;1)$, $B(3;-2)$, $C(0;k)$ лежат на одной прямой?

***Решение*:**

1) Составим уравнение прямой AB:

$$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-1}{-2-1} \Rightarrow \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-3} \Rightarrow 3x+y-7=0$$

2) $C(0;k)\in AB \Rightarrow 3\cdot 0+k-7=0 \Rightarrow k=7$

Ответ: 7.

1.18. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $C(1;3)$ и параллельной прямой, проходящей через точки $A(-1;7)$ и $B(3;3)$.

Решение:

1) Составим уравнение прямой AB:

$$\frac{x+1}{3+1}=\frac{y-7}{3-7} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+1}{4}=\frac{y-7}{-4} \quad \Rightarrow \quad x+y-6=0$$

$y=-x+6$

$k_1=-1$

2) $k_2=k_1=-1$

Уравнение прямой, проходящей через точку $C(1;3)$ с угловым коэффициентом k_2:

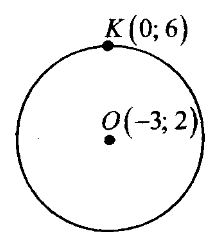
$y=y_0+k(x-x_0)$

$y=3-(x-1) \quad \Rightarrow \quad y=-x+4$

Ответ: $y=-x+4$.

1.19. Запишите уравнение окружности, центр которой находится в точке $(-3;2)$ и которая проходит через точку $(0;6)$.

Решение:



1) Найдем радиус окружности:

$r=OK=\sqrt{(-3-0)^2+(2-6)^2}=\sqrt{25}=5$

2) Составим уравнение окружности с центром в точке $O(-3;2)$:

$(x+3)^2+(y-2)^2=25$

Ответ: $(x+3)^2+(y-2)^2=25$.

1.20. Расстояние от центра окружности $x^2+2x+y^2-4y+1=0$ до начала координат равно?

Решение:

Преобразуем уравнение окружности:

$x^2+2x+1+y^2-4y+4+1-1-4=0$;

$(x+1)^2+(y-2)^2=4$.

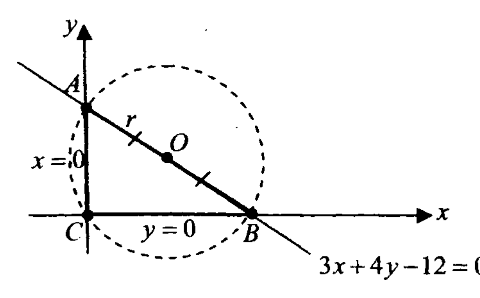
Координаты центра окружности: $(-1;2)$.

Расстояние от центра до начала координат: $d=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{5}$.

1.21. Составьте уравнение окружности, описанной около треугольника, стороны которого лежат на прямых: $x=0$, $y=0$, $3x+4y-12=0$.

Решение:



1) Найдем точки пересечения прямой $3x+4y-12=0$ с осями координат.

С осью OY: $\begin{cases} x=0 \\ 3x+4y-12=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow A(0;3)$.

С осью OX: $\begin{cases} y=0 \\ 3x+4y-12=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow B(4;0)$.

2) Центр описанной около прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы. Найдем координаты центра окружности:

$$O\left(\frac{0+4}{2};\ \frac{3+0}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad O(2;\ 1{,}5).$$

Радиус окружности равен половине длины гипотенузы AB:

$$r=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{4^2+3^2}}{2}=2{,}5.$$

3) Составим уравнение окружности: $(x-2)^2+(y-1{,}5)^2=6{,}25$.

Ответ: $(x-2)^2+(y-1{,}5)^2=6{,}25$.

1.22. Напишите уравнение окружности, радиус которой равен 5, и проходящей через точки $A(-2;1)$ и $B(6;1)$.

Решение:

Составим уравнение окружности с радиусом 5 и центром $(x_0;\ y_0)$:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=25$$

Т.к. точки $A(-2;1)$ и $B(6;1)$ принадлежат данной окружности, составим систему уравнений:

$$\begin{cases}(-2-x_0)^2+(1-y_0)^2=25\\(6-x_0)^2+(1-y_0)^2=25\end{cases} \quad \Rightarrow \quad -\begin{cases}x_0^2+4x_0+y_0^2-2y_0=20\\x_0^2-12x_0+y_0^2-2y_0=-12\end{cases}$$

$$16x_0=32$$

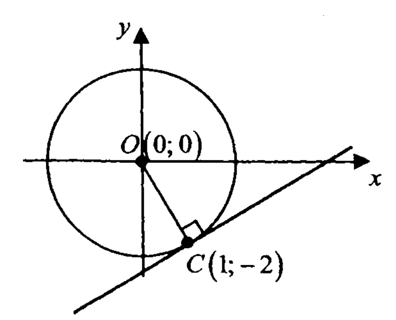
$$x_0=2$$

$$\begin{cases}x_0=2\\y_0^2-2y_0-8=0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_0=2\\y_0=4\end{cases}\\\begin{cases}x_0=2\\y_0=-2\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(x-2)^2+(y-4)^2=25$ или $(x-2)^2+(y+2)^2=25$.

1.23. Напишите уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=5$ в точке $C(1;-2)$.

Решение:



1) Составим уравнение прямой OC, где $O(0;0)$ - центр окружности:

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-0}{-2-0} \quad \Rightarrow \quad y=-2x \quad \Rightarrow \quad k_1=-2$$

2) Поскольку касательная должна быть перпендикулярна радиусу OC, для угловых коэффициентов выполняется соотношение:

$$k_2 \cdot k_1=-1 \quad \Rightarrow \quad k_2=-\frac{1}{k_1}=\frac{1}{2}.$$

3) Уравнение прямой, проходящей через точку $C(1;-2)$ с угловым коэффициентом k_2:

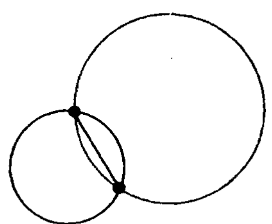
$$y=y_0+k_2(x-x_0)$$

$$y=-2+\frac{1}{2}(x-1) \quad \Rightarrow \quad y=\frac{x}{2}-\frac{5}{2}$$

Ответ: $y=\frac{x}{2}-\frac{5}{2}$.

1.24. Найдите уравнение общей хорды двух окружностей $x^2+y^2=10$ и $x^2+y^2-10x-10y+30=0$.

Решение:



1) Найдем точки пересечения двух окружностей:

$$-\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2+y^2-10x-10y+30=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x+y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)^2-2xy=10 \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=3 \\ x+y=4 \end{cases}$$

$(1;3)$, $(3;1)$

2) Составим уравнение общей хорды:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-3}{1-3} \Rightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-2} \Rightarrow x+y-4=0$$

Ответ: $x+y-4=0$.

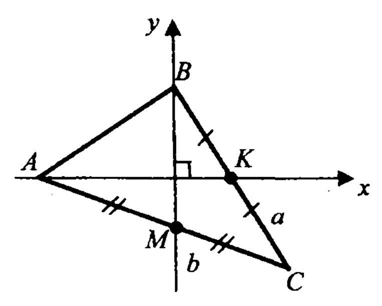
Решение геометрических задач методом координат

Формулы координат середины отрезка и расстояния между двумя точками можно использовать для решения более сложных геометрических задач. Главное при решении геометрических задач координатным методом – удачный выбор системы координат: выбор начала координат и направления осей. Обычно в качестве осей координат выбирают прямые, фигурирующие в условии задачи, а также оси симметрии фигур, рассматриваемых в задаче. Желательно, чтобы система координат естественным образом определялась условием задачи.

Приведенные ниже задания уже были решены методами элементарной геометрии, но для их решения можно использовать и метод координат.

1.25. Две стороны треугольника равны a и b. Медианы, проведенные к этим сторонам взаимно перпендикулярны. Найдите третью сторону.

Решение:



1) Пусть $BC = a$, $AC = b$.

Введем систему координат, взяв медианы треугольника в качестве осей координат. Обозначим координаты точек $B(0;\, y)$, $A(-x;\, 0)$.

Учитывая, что медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$ (считая от вершины), получаем:

$$M\left(0; -\frac{y}{2}\right); \quad K\left(\frac{x}{2}; 0\right).$$

2) Так как точка M середина отрезка AC, для точки $C(x_C;\, y_C)$ имеют место равенства:

$$0 = \frac{-x + x_C}{2} \quad \Rightarrow \quad x_C = x$$

$$-\frac{y}{2} = \frac{0 + y_C}{2} \quad \Rightarrow \quad y_C = -y$$

$$C(x; -y)$$

3) Найдем расстояния BC и AC:

$$\begin{cases} a = \sqrt{x^2 + 4y^2} \\ b = \sqrt{4x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} a^2 = x^2 + 4y^2 \\ b^2 = 4x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{4b^2 - a^2}{15} \\ y^2 = \dfrac{4a^2 - b^2}{15} \end{cases}$$

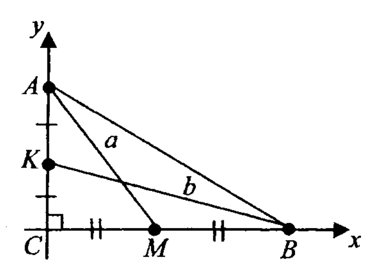
4) Искомое расстояние AB будет:

$$AB = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{15} + \frac{4a^2 - b^2}{15}} = \sqrt{\frac{3b^2 + 3a^2}{15}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}$$

Ответ: $\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{5}}$.

1.26. Медианы, проведенные к катетам прямоугольного треугольника, равны a и b. Найдите гипотенузу.

Решение:



1) Пусть $AM = a$, $BK = b$.

Введем систему координат, выбрав в качестве осей координат катеты треугольника. Обозначим координаты точек:

$A(0; 2y)$, $B(2x; 0)$.

Тогда координаты других точек будут: $M(x; 0)$, $K(0; y)$.

2) Длина гипотенузы: $AB = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

3) Найдем расстояния AM и BK:

$$\begin{cases} a = \sqrt{(0-x)^2 + (2y-0)^2} \\ b = \sqrt{(2x-0)^2 + (0-y)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = x^2 + 4y^2 \\ b^2 = 4x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = \dfrac{4a^2 - b^2}{15} \\ x^2 = \dfrac{4b^2 - a^2}{15} \end{cases}$$

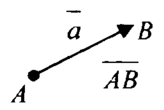
4) Найдем гипотенузу:

$$AB = 2\sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{15} + \frac{4a^2 - b^2}{15}} = 2\sqrt{\frac{3b^2 + 3a^2}{15}} = 2\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}$$

Ответ: $2\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{5}}$.

§2. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Векторами называются величины, которые характеризуются численным значением и направлением.



Векторы на плоскости

Длина вектора $\left|\overline{a}\right|$ - расстояние от начала вектора, до его конца.

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$$

Координаты вектора $\overline{AB}\left(a_x;\ a_y\right)$ вычисляются по формулам:

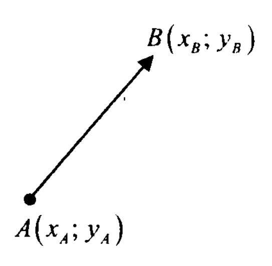
$$a_x = x_B - x_A, \quad a_y = y_B - y_A.$$

Длина вектора в координатах:

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\ .$$

Координаты вектора не изменяются при параллельном переносе.

У равных векторов соответствующие координаты равны.



Действия над векторами

Если $\overline{a}\left(a_x;\ a_y\right)$ и $\overline{b}\left(b_x;\ b_y\right)$, то:

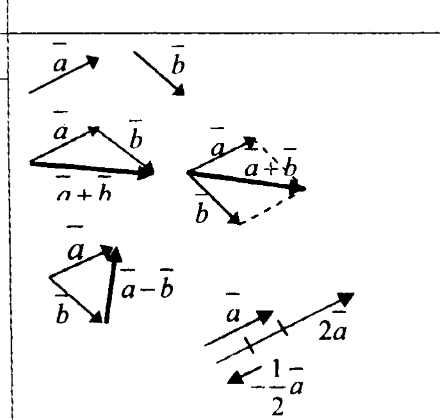
$$\overline{a} + \overline{b} = \left(a_x + b_x;\ a_y + b_y\right)$$

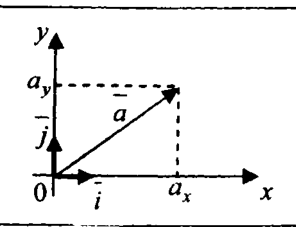
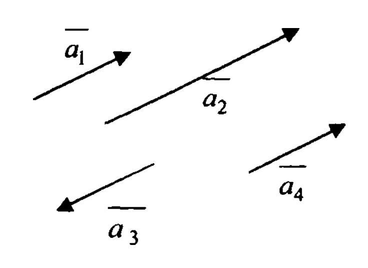
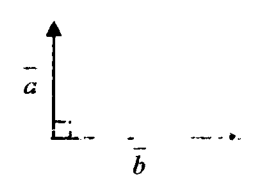
$$\overline{a} - \overline{b} = \left(a_x - b_x;\ a_y - b_y\right)$$

$$\lambda\overline{a} = \left(\lambda a_x;\ \lambda a_y\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} = \left(\alpha a_x + \beta b_x;\ \alpha a_y + \beta b_y\right),$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$



Разложение вектора по координатным векторам	
Если $\overline{a}\left(a_x;\ a_y\right)$, то $\overline{a}=a_x\cdot\overline{i}+a_y\cdot\overline{j}$.	
Коллинеарные векторы	
Коллинеарными называются векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых. *Условие коллинеарности* векторов $\overline{a}\left(a_x;\ a_y\right)$ и $\overline{b}\left(b_x;\ b_y\right)$ в координатном представлении: $$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\lambda .$$	 $\overline{a_1}\uparrow\uparrow\overline{a_2}$ - сонаправленные векторы $\overline{a_3}\uparrow\downarrow\overline{a_4}$ - противоположно направленные векторы
Ортогональные векторы	
$\overline{a}\perp\overline{b} \Leftrightarrow \angle(\overline{a},\ \overline{b})=90^\circ$ *Условие ортогональности* векторов $\overline{a}\left(a_x;\ a_y\right)$ и $\overline{b}\left(b_x;\ b_y\right)$ на плоскости: $$a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y=0 .$$	 $\overline{a}\perp\overline{b}$ - ортогональные векторы

Скалярное умножение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется <u>число</u>, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos\varphi .$$

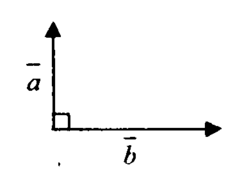
Скалярное произведение векторов $\bar{a}(a_x;a_y)$ и $\bar{b}(b_x;b_y)$ выражается через координаты:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y .$$

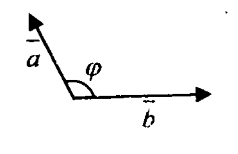
Модуль вектора:

$$\left|\bar{a}\right|=\sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}}=\sqrt{\bar{a}^2} .$$

$0°\le\varphi<90° \quad\Rightarrow\quad \bar{a}\cdot\bar{b}>0$



$\varphi=90° \quad\Rightarrow\quad \bar{a}\cdot\bar{b}=0$



$90°<\varphi\le 180° \quad\Rightarrow\quad \bar{a}\cdot\bar{b}<0$

Применение скалярного произведения к решению задач

$$\cos\angle(\bar{a},\bar{b})=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|}$$

В координатном представлении: $\cos\angle(\bar{a},\bar{b})=\dfrac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2}}$.

Векторы в пространстве

Если координаты начала $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ и конца вектора $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, то ***координаты вектора***:

$\overline{AB}\,(x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A)$.

Длина вектора $\overline{a}\,(a_x;\ a_y;\ a_z)$, заданного своими координатами:

$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Если $\overline{a}\,(a_x;\ a_y;\ a_z)$ и $\overline{b}\,(b_x;\ b_y;\ b_z)$, то:

$\overline{a}+\overline{b} = (a_x + b_x;\ a_y + b_y;\ a_z + b_z)$

$\overline{a}-\overline{b} = (a_x - b_x;\ a_y - b_y;\ a_z - b_z)$

$\lambda\overline{a} = (\lambda a_x;\ \lambda a_y;\ \lambda a_z),\ \ \lambda \in \mathbb{R}$

$\alpha\,\overline{a} + \beta\,\overline{b} = (\alpha\,a_x + \beta\,b_x;\ \alpha\,a_y + \beta\,b_y;\ \alpha\,a_z + \beta\,b_z),\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\overline{a}\cdot\overline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$

$\cos\angle(\overline{a},\ \overline{b}) = \dfrac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$ - угол между векторами.

<u>Условие коллинеарности векторов</u>: $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z} = \lambda$.

<u>Условие ортогональности векторов</u>: $a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0$.

Рассмотрим решение типовых задач, встречающихся в тестах.

2.1. Найдите координаты конца вектора $\bar{a}(-2; 1; 3)$, если его начало совпадает с точкой $A(5; 4; -1)$.

Решение:

$\bar{a}$ $B(x; y; z)$

$A(5; 4; -1)$

Используя формулы нахождения координат вектора, получим:

$-2 = x - 5 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

$1 = y - 4 \quad \Rightarrow \quad y = 5$

$3 = z + 1 \quad \Rightarrow \quad z = 2$

Ответ: $B(3; 5; 2)$.

2.2. Даны векторы: $\bar{a}(3; -2)$ и $\bar{b}(-3; 4)$. Найдите координаты вектора $2\bar{a} - 3\bar{b}$.

Решение:

$\bar{a}(3; -2)$, $\bar{b}(-3; 4)$

$2\bar{a}(6; -4)$, $3\bar{b}(-9; 12)$

$2\bar{a} - 3\bar{b} = (6 - (-9) \; ; \; -4 - 12) = (15; -16)$

Ответ: $(15; -16)$.

2.3. Даны координаты точек $A(-3; 2; -1)$, $B(2; -1; -3)$, $C(1; -4; 3)$, $D(-1; 2; -2)$. Найдите $\left| 2\overline{AB} + 3\overline{CD} \right|$.

Решение:

Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$:

$\overline{AB}(2 + 3; \; -1 - 2; \; -3 + 1) \quad \Rightarrow \quad \overline{AB}(5; -3; -2)$

$\overline{CD}(-1 - 1; \; 2 + 4; \; -2 - 3) \quad \Rightarrow \quad \overline{CD}(-2; 6; -5)$

$2\overline{AB}(10; \; -6; \; -4)$, $3\overline{CD}(-6; \; 18; \; -15)$

$2\overline{AB}+3\overline{CD}=(10-6;\ -6+18;\ -4-15)=(4;12;-19)$

$\left|2\overline{AB}+3\overline{CD}\right|\sqrt{4^2+12^2+(-19)^2}=\sqrt{521}$

Ответ: $\sqrt{521}$.

2.4. Вычислите длину вектора $\overline{a}=(\overline{m}-3\overline{n})-(3\overline{m}-4\overline{n})$, если даны координаты векторов $\overline{n}(2;4;5)$, $\overline{m}(1;0;1)$.

Решение:

$\overline{a}=(\overline{m}-3\overline{n})-(3\overline{m}-4\overline{n})=\overline{n}-2\overline{m}$

$\overline{n}(2;4;5)$, $2\overline{m}(2;0;2)$

$\overline{a}=\overline{n}-2\overline{m}=(2-2;\ 4-0;\ 5-2)=(0;4;3)$

$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{0^2+4^2+3^2}=5$

Ответ: 5.

2.5. Длина вектора $\overline{a}(m;\ m+1;\ 2)$ меньше 3 для всех значений m, принадлежащих множеству?

Решение:

$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{m^2+(m+1)^2+2^2}<3$

$\sqrt{2m^2+2m+5}<3$

$2m^2+2m-4<0$

$m^2+m-2<0$

$(m+2)(m-1)<0$

$m\in(-2;1)$

Ответ: $(-2;1)$.

2.6. При каком значении a векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны, если $A(-2;-1;2)$, $B(4;-3;6)$, $C(-1;\ a-1;\ 1)$, $D(-4;\ -1;\ a)$.

Решение:

$\overline{AB}(4+2;\ -3+1;\ 6-2) \Rightarrow \overline{AB}(6;-2;4)$

$\overline{CD}(-4+1;\ -1-a+1;\ a-1) \Rightarrow \overline{CD}(-3;\ -a;\ a-1)$

Условие коллинеарности векторов: $\frac{6}{-3}=\frac{-2}{-a}=\frac{4}{a-1}$.

Тогда $-a=\frac{-3\cdot(-2)}{6}=1$, $a=-1$ или $a-1=\frac{-3\cdot 4}{6}=-2$, $a=-1$.

Ответ: -1.

2.7. Лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если $A(3;-7;8)$, $B(-5;4;1)$, $C(27;-40;29)$?

Решение:

Точки A, B и C лежат на одной прямой, если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ коллинеарны.

Проверим:

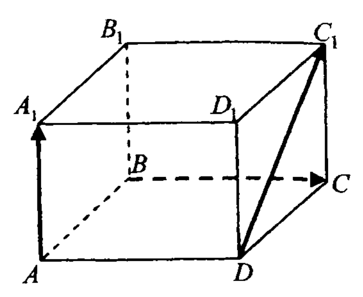
$\overline{AB}(-8;11;-7)$; $\overline{AC}(24;-33;21)$.

$\overline{AC}=-3\cdot\overline{AB}$, то есть $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ коллинеарны.

Ответ: Да.

2.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб. Найдите вектор, равный $\overline{AA_1}-\overline{DC_1}+\overline{BC}$.

Решение:



$\overline{AA_1} - \overline{DC_1} + \overline{BC} = \overline{AA_1} + \overline{C_1D} + \overline{BC} = \overline{CC_1} + \overline{C_1D} + \overline{BC} =$

$= \overline{CD} + \overline{BC} = \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{BD}$

Ответ: $\overline{BD}$.

2.9. Найдите $\left|\overline{a}\right| + \left|\overline{b}\right|$, если $\left|\overline{a} + \overline{b}\right| = 19$, $\left|\overline{a} - \overline{b}\right| = 17$ и $\left|\overline{b}\right| = 10$.

Решение:

По формуле: $\left|\overline{a} + \overline{b}\right|^2 + \left|\overline{a} - \overline{b}\right|^2 = 2\left(\left|\overline{a}\right|^2 + \left|\overline{b}\right|^2\right)$.

Подставляя данные задачи, получим:

$19^2 + 17^2 = 2\left(\left|\overline{a}\right|^2 + 10^2\right)$

$2\left|\overline{a}\right|^2 = 450 \quad \Rightarrow \quad \left|\overline{a}\right| = 15$

$\left|\overline{a}\right| + \left|\overline{b}\right| = 15 + 10 = 25$

Ответ: 25.

2.10. Вычислите $\left|\overline{a} - \overline{b}\right|$, если $\left|\overline{a}\right| = 13$, $\left|\overline{b}\right| = 19$ и $\left|\overline{a} + \overline{b}\right| = 24$.

Решение:

По формуле: $\left|\overline{a} + \overline{b}\right|^2 + \left|\overline{a} - \overline{b}\right|^2 = 2\left(\left|\overline{a}\right|^2 + \left|\overline{b}\right|^2\right)$.

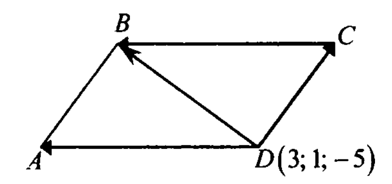
По условию задачи: $24^2 + \left|\overline{a} - \overline{b}\right|^2 = 2\left(13^2 + 19^2\right)$.

$\left|\overline{a} - \overline{b}\right|^2 = 484 \quad \Rightarrow \quad \left|\overline{a} - \overline{b}\right| = 22$

Ответ: 22.

2.11. Если в параллелограмме $ABCD$ заданы $D(3;1;-5)$, $\overline{DC}(-2;-1;2)$, $\overline{DB}(4;-3;-1)$, то сумма координат вершины A будет равна?

Решение:



$$\overline{CB}=\overline{DB}-\overline{DC}=(4+2;\ -3+1;\ -1-2)=(6;-2;-3)$$

$$\overline{CB}=\overline{DA}\quad\Rightarrow\quad\overline{DA}(6;-2;-3)$$

Найдем координаты точки A:

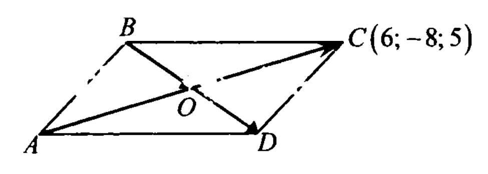
$$\begin{cases}x-3=6\\y-1=-2\\z+5=-3\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}x=9\\y=-1\\z=-8\end{cases}\Rightarrow\quad A(9;-1;-8)$$

Сумма координат вершины A будет равна: $9-1-8=0$.

Ответ: 0.

2.12. В параллелограмме $ABCD$ заданы вершина $C(6;-8;5)$ и векторы $\overline{AC}(-3;1;4)$ и $\overline{BD}(2;-3;5)$ - его диагонали. Найдите сумму координат точки B.

Решение:



$$\overline{BO}=\frac{1}{2}\overline{BD}\quad\text{и}\quad\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{AC}$$

$$\overline{BO}+\overline{OC}=\overline{BC}$$

$$\overline{BC}=\frac{1}{2}\left(\overline{BD}+\overline{AC}\right)=\left(-\frac{1}{2};\ -1;\ \frac{9}{2}\right)$$

Найдем координаты точки B:

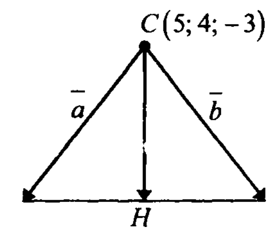
$$\begin{cases} 6-x=-\frac{1}{2} \\ -8-y=-1 \\ 5-z=\frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{13}{2} \\ y=-7 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Сумма координат вершины B : $x+y+z=\frac{13}{2}-7+\frac{1}{2}=0$.

Ответ: 0.

2.13. Векторы $\overline{a}(5;2;-1)$ и $\overline{b}(1;-5;-2)$, проведенные из точки $C(5;4;-3)$, являются боковыми сторонами равнобедренного треугольника. Найдите сумму координат основания высоты треугольника, проведенной из вершины C.

Решение:



$$\overline{CH}=\frac{1}{2}\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\left(3;\ -\frac{3}{2};\ -\frac{3}{2}\right)$$

Найдем координаты точки H :

$$\begin{cases} x-5=3 \\ y-4=-\frac{3}{2} \\ z+3=-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=\frac{5}{2} \\ z=-\frac{9}{2} \end{cases}$$

Сумма координат вершины H : $x+y+z=8+\frac{5}{2}-\frac{9}{2}=6$.

Ответ: 6.

2.14. Если вектор $\bar{a}(1;\ 2m+1;\ -2)$ перпендикулярен вектору $\bar{b}(m;\ 1;\ 2m)$, то m равно?

Решение:

Из условия ортогональности векторов получим:

$1\cdot m+(2m+1)\cdot 1+(-2)\cdot 2m=0$

$1-m=0 \quad \Rightarrow \quad m=1$

Ответ: 1.

2.15. Если вектор $\bar{a}(x;\,y;\,3)$ перпендикулярен вектору $\bar{b}(3;1;-1)$ и оси Oy, то сумма $x+y$ равна?

Решение:

1) Из условия $\bar{a}\perp\bar{b}$ получим:

$x\cdot 3+y\cdot 1+3\cdot(-1)=0 \quad \Rightarrow \quad 3x+y=3$.

2) На оси Oy возьмем единичный вектор $\bar{j}(0;1;0)$.

Из условия $\bar{a}\perp\bar{j}$ получим:

$x\cdot 0+y\cdot 1+3\cdot 0=0 \quad \Rightarrow \quad y=0$.

3) $\begin{cases}3x+y=3\\ y=0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}y=0\\ x=1\end{cases} \quad \Rightarrow \quad x+y=1$

Ответ: 1.

2.16. Даны точки $A(1;-2)$ и $B(2;4)$, тогда разложение вектора $\overline{AB}$ по координатным векторам равно?

Решение:

Найдем координаты вектора:

$\overline{AB}(2-1;\ 4+2) \quad \Rightarrow \quad \overline{AB}(1;6)$.

Тогда $\overline{AB}=\bar{i}+6\bar{j}$.

Ответ: $\bar{i}+6\bar{j}$.

2.17. $\left|\overline{a}\right| = 2$, $\left|\overline{b}\right| = 3$, а угол между ними равен $135°$. Вычислите скалярное произведение векторов.

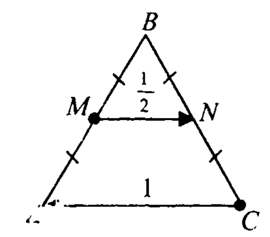
Решение:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos 135° = 2\cdot 3\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2}$$

Ответ: $-3\sqrt{2}$.

2.18. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 1. M и N - середины отрезков AB и BC соответственно, тогда $\overline{MN}\cdot\overline{CA}$ равно?

Решение:



$$\overline{MN}\cdot\overline{CA} = \left|\overline{MN}\right|\cdot\left|\overline{CA}\right|\cdot\cos 180° = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-1) = -\frac{1}{2}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

2.19. Даны координаты точек: $A(1;-1;-4)$, $B(-3;-1;0)$, $C(-1;2;5)$, $D(2;-3;1)$. Найдите косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

Решение:

$$\overline{AB}(-3-1;\ -1+1;\ 0+4) \Rightarrow \overline{AB}(-4;0;4)$$

$$\overline{CD}(2+1;\ -3-2;\ 1-5) \Rightarrow \overline{CD}(3;-5;-4)$$

$$\cos\angle\left(\overline{AB},\overline{CD}\right) = \frac{-4\cdot 3+0\cdot(-5)+4\cdot(-4)}{\sqrt{(-4)^2+0^2+4^2}\cdot\sqrt{3^2+(-5)^2+(-4)^2}} =$$

$$= \frac{-28}{4\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}} = -0,7$$

Ответ: $-0,7$.

2.20. Даны векторы $\overline{a}(3;-1;4)$, $\overline{b}(2;1;3)$ и $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$. Найдите косинус угла между векторами $\overline{c}$ и $\overline{b}$.

***Решение*:**

Найдем координаты вектора $\overline{c}=(3-2;\ -1-1;\ 4-3)=(1;-2;1)$.

$$\cos\angle(\overline{c},\overline{b})=\frac{1\cdot 2+(-2)\cdot 1+1\cdot 3}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+3^2}}=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}$$

Ответ: $\dfrac{3}{2\sqrt{21}}$.

2.21. Найдите угол между векторами $\overline{p}=2\overline{a}+3\overline{b}$ и $\overline{q}=2\overline{a}-3\overline{b}$, если $\overline{a}=\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$ и $\overline{b}=2\overline{i}+2\overline{j}$.

***Решение*:**

$\overline{a}(1;-1;2)$ и $\overline{b}(2;2;0)$

$\overline{p}=2\overline{a}+3\overline{b}=(2\cdot 1+3\cdot 2;\ 2\cdot(-1)+3\cdot 2;\ 2\cdot 2+3\cdot 0)=(8;4;4)$

$\overline{q}=2\overline{a}-3\overline{b}=(2\cdot 1-3\cdot 2;\ 2\cdot(-1)-3\cdot 2;\ 2\cdot 2-3\cdot 0)=(-4;-8;4)$

$$\cos\varphi=\frac{8\cdot(-4)+4\cdot(-8)+4\cdot 4}{\sqrt{96}\cdot\sqrt{96}}=-\frac{48}{96}=-\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\varphi=120^\circ$$

Ответ: 120°.

2.22. Дано: $|\overline{a}|=1$; $|\overline{b}|=3$; $|\overline{c}|=5$; $\angle(\overline{a},\overline{b})=60^\circ$; $\angle(\overline{b},\overline{c})=90^\circ$; $\angle(\overline{a},\overline{c})=120^\circ$. Найдите $|\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}|$.

***Решение*:**

$$|\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}|=\sqrt{(\overline{a}-\overline{b}+\overline{c})^2}=\sqrt{\overline{a}^2+\overline{b}^2+\overline{c}^2-2\overline{a}\overline{b}+2\overline{a}\overline{c}-2\overline{b}\overline{c}}=$$

$$=\sqrt{1+9+25-2\cdot 1\cdot 3\cdot\frac{1}{2}+2\cdot 1\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2\cdot 3\cdot 5\cdot 0}=\sqrt{35-3-5}=$$

$$=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

Ответ: $3\sqrt{3}$.

2.23. Дано: $\left|\bar{a}\right|=2$, $\left|\bar{b}\right|=3$, $\angle\left(\bar{a},\bar{b}\right)=120°$. Найдите $\cos\varphi$, где φ - угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{a}+\bar{b}$.

Решение:

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\left(\bar{a}+\bar{b}\right)}{\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{a}+\bar{b}\right|}=\frac{\bar{a}^2+\bar{a}\cdot\bar{b}}{2\cdot\sqrt{\left(\bar{a}+\bar{b}\right)^2}}=\frac{\bar{a}^2+\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos120°}{2\sqrt{\bar{a}^2+\bar{b}^2+2\cdot\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos120°}}=$$

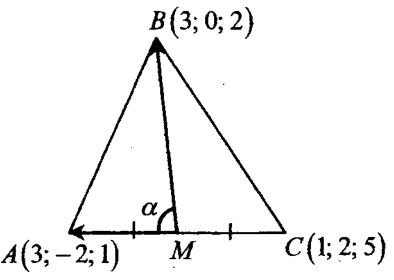
$$=\frac{4+2\cdot3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2\cdot\sqrt{4+9+2\cdot2\cdot3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}$$

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{7}}$.

2.24. В треугольнике с вершинами в точках $A\left(3;-2;1\right)$, $B\left(3;0;2\right)$, $C\left(1;2;5\right)$ угол, образованный медианой BM и основанием AC равен?

Решение:

Найдем угол между векторами $\overline{MB}$ и $\overline{MA}$.



1) Координаты точки M:

$$M\left(\frac{3+1}{2};\ \frac{-2+2}{2};\ \frac{1+5}{2}\right)\ \Rightarrow\ M\left(2;0;3\right)$$

2) Координаты векторов $\overline{MB}$ и $\overline{MA}$:

$$\overline{MB}\left(3-2;\ 0-0;\ 2-3\right)\ \Rightarrow\ \overline{MB}\left(1;0;-1\right)$$

$$\overline{MA}\left(3-2;\ -2-0;\ 1-3\right)\ \Rightarrow\ \overline{MA}\left(1;-2;-2\right)$$

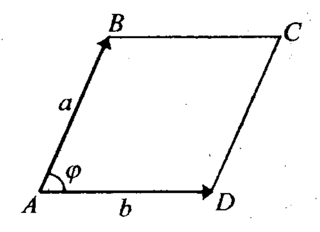
3) $\cos\alpha = \dfrac{1\cdot 1+0\cdot(-2)+(-1)\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}\cdot 3} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\alpha = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{\pi}{4}$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$.

2.25. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}(0;2;1)$ и $\bar{b}(1;0;2)$.

Решение:



$S_{ABCD} = AD\cdot AB\cdot\sin\varphi$

$AD = \left|\bar{b}\right| = \sqrt{1^2+0^2+2^2} = \sqrt{5}\,; \qquad AB = \left|\bar{a}\right| = \sqrt{0^2+2^2+1^2} = \sqrt{5}\,.$

$\cos\varphi = \dfrac{0\cdot 1+2\cdot 0+1\cdot 2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{2}{5}$

$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$

Таким образом, $S_{ABCD} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{5} = \sqrt{21}$.

Ответ: $\sqrt{21}$.

2.26. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ единичной длины образуют попарно углы $60°$. Найдите угол φ между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}+\bar{c}$.

Решение:

1) $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a}\cdot\left(\overline{b}+\overline{c}\right)}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}+\overline{c}\right|} \quad\Rightarrow\quad \cos\varphi = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}+\overline{c}\right|}$

2) Найдем: $\overline{a}\cdot\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\angle\left(\overline{a},\overline{b}\right) = 1\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$;

$\overline{a}\cdot\overline{c} = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|c\right|\cdot\cos\angle\left(\overline{a},\overline{c}\right) = 1\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

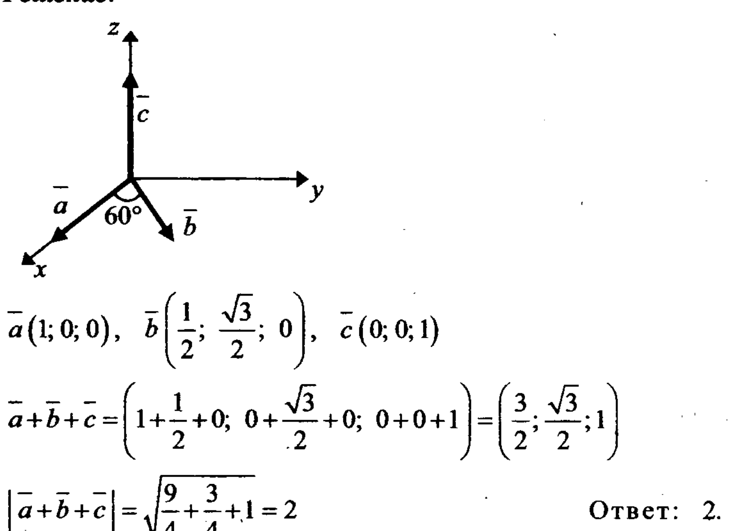
3) $\left|\overline{b}+\overline{c}\right| = \sqrt{\left(\overline{b}+\overline{c}\right)^2} = \sqrt{\overline{b}^2+2\overline{b}\cdot\overline{c}+\overline{c}^2} = \sqrt{1+2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ+1} = \sqrt{3}$

4) $\cos\varphi = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad\Rightarrow\quad \varphi = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

2.27. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол 60°, вектор $\overline{c}$ им перпендикулярен. Найдите абсолютную величину вектора $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$, если $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ - единичные векторы.

Решение:



$\overline{a}(1;0;0)$, $\overline{b}\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{\sqrt{3}}{2};\ 0\right)$, $\overline{c}(0;0;1)$

$\overline{a}+\overline{b}+\overline{c} = \left(1+\dfrac{1}{2}+0;\ 0+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+0;\ 0+0+1\right) = \left(\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};1\right)$

$\left|\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right| = \sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}+1} = 2$ Ответ: 2.

Глава XI.

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§1. КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика (от лат. combinare - соединять, сочетать) – это раздел математики, изучающий задачи, решение которых требует составления различных комбинаций из конечного числа элементов и подсчета числа полученных комбинаций.

Как правило, для решения комбинаторных задач применяется один из трех методов:

- подсчет методом непосредственного перебора;
- подсчет с использованием комбинаторных принципов;
- подсчет с использованием формул комбинаторики.

Рассмотрим вышеперечисленные методы на примерах решения комбинаторных задач.

Перебор всех возможных вариантов

В основе данного метода лежит идея комбинирования, то есть задание алгоритма, обеспечивающего получение всех возможных вариантов. Перечисление вариантов «ручным» перебором применяется только в простейших случаях.

1.1. Сколько существует 9-значных чисел, цифры которых расположены в порядке убывания (то есть каждая следующая меньше предыдущей)?

Решение:

Выпишем все цифры в порядке убывания:

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0.

Чтобы получить девятизначное число, удовлетворяющее условию задачи, нужно убрать одну цифру. Это можно сделать 10 способами.

Ответ: 10.

1.2. Из группы теннисистов, в которую входят четыре человека – Антонов, Григорьев, Сергеев и Федоров, тренер выделяет пару для участия в соревнованиях. Сколько существует вариантов выбора такой пары?

Решение:

Составим сначала все пары, в которые входит Антонов (для краткости будем писать первые буквы фамилий). Получим три пары: АГ, АС, АФ.

Добавим к перечисленным выше парам новые пары, в которые входит Григорьев, но не входит Антонов. Таких пар две: ГС, ГФ.

Далее составим пары, в которые входит Сергеев, но не входит Антонов и Григорьев. Такая пара только одна: СФ.

Других вариантов составления пар нет, так как все пары, в которые входит Федоров, уже составлены.

Итак, мы получили 6 пар: АГ, АС, АФ, ГС, ГФ, СФ. Значит, всего существует 6 вариантов выбора тренером пары теннисистов из данной группы.

Ответ: 6.

Замечание: В данном примере не важен порядок выбора пары: Антонов и Григорьев или Григорьев и Антонов.

В следующем примере учитывается порядок элементов в комбинации.

1.3. Три друга – Антон, Борис и Виктор – приобрели два билета на футбольный матч на 1-е и 2-е места первого ряда стадиона. Сколько у друзей есть вариантов занять эти два места на стадионе?

Решение:

Если на матч пойдут Антон и Борис, то они могут занять места двумя способами: 1-е место – Антон, 2-е – Борис, или наоборот. Аналогично Антон и Виктор, Борис и Виктор. Таким образом, мы получили 6 вариантов: АБ, БА, АВ, ВА, БВ, ВБ.

Ответ: 6.

Для решения комбинаторных задач очень часто используются следующие два правила подсчета общего числа возможных комбинаций:

Правило суммы (правило сложения). Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать «либо A, либо B» можно $m+n$ способами.

Правило произведения (правило умножения). Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами, и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то выбор «A и B» может быть осуществлен $m \cdot n$ способами.

1.4. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Капитаном может стать любой из 11 футболистов. После выбора капитана на роль его заместителя могут претендовать 10 оставшихся человек.

Таким образом, по правилу произведения есть $11 \cdot 10 = 110$ разных вариантов выбора.

Ответ: 110.

1.5. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску чёрную и белую ладью так, чтобы они не били друг друга?

Решение:

Чёрную ладью можно поставить на шахматную доску 64 различными способами. Независимо от выбора поля чёрная ладья бьёт 15 полей, поэтому для второй ладьи остаётся $64-15=49$ полей. Всего число возможных способов, по правилу умножения, равно $64 \cdot 49 = 3\,136$.

Ответ: 3 136.

1.6. Сколько решений в натуральных числах имеет система
$$\begin{cases} x+y=10 \\ u+v=5 \end{cases}?$$

Решение:

Число 10 можно представить в виде суммы двух натуральных слагаемых девятью различными способами: $1+9$, $2+8$, ..., $4+6$, $5+5$, $6+4$, ..., $9+1$. Заметим, что решения $(a;b)$ и $(b;a)$ мы считаем различными, и потому нам важен порядок. Аналогично, число 5 можно представить в виде суммы двух натуральных слагаемых четырьмя

различными способами. Каждому решению $(x;y)$ можно выбрать в пару четыре решения $(u;v)$. По правилу произведения, количество решений системы равно $9\cdot 4=36$.

Ответ: 36.

1.7. В урне находятся 10 белых, 15 черных и 20 красных шаров. Сколькими различными способами можно взять из урны 3 шара разных цветов?

Решение:

В таких задачах предполагается, что все шары различимы, например, пронумерованы. Тройку шаров, взятых из урны, можно образовать тремя действиями.

1-е действие. Возьмем один белый шар. Это действие можно совершить 10-ю способами (по числу различных белых шаров в урне).

2-действие. К выбранному белому шару присоединим черный шар, который можно взять 15-ю различными способами (по числу различных черных шаров в урне).

3-е действие. К выбранной паре присоединим красный шар, который можно взять 20-ю различными способами (по числу красных шаров в урне).

Таким образом, можно образовать различные тройки разноцветных шаров, причем порядок действия при этом не играет роли. Число различных способов выбора троек разноцветных шаров по правилу умножения равно $10\cdot 15\cdot 20=3000$.

Ответ: 3 000.

1.8. Пусть из пункта A в пункт B имеется 5 дорог, а из пункта B в пункт C – 6 дорог.

1) Сколько существует различных вариантов проезда из пункта A в пункт С?

2) Сколько существует различных вариантов проезда из пункта A в пункт B и обратно?

3) Сколько существует различных вариантов проезда из пункта A в пункт B и обратно при условии, что дороги туда и обратно будут разными?

Решение:

1) Существует 5 различных путей из пункта A в пункт B – это 5 способов 1-го действия, при этом существует 6 различных путей из пункта B в пункт C – это 6 различных способов 2-го действия. Согласно правилу умножения, число различных способов выбора пути из пункта A в пункт C равно $5 \cdot 6 = 30$.

2) Из пункта A в пункт B ведет 5 дорог, значит, имеется 5 способов проезда туда и 5 способов проезда обратно. По правилу умножения число всех способов проезда туда и обратно равно $5 \cdot 5 = 25$.

3) Рассуждаем аналогично пункту 2), но учитываем, что дороги туда и обратно не должны совпадать, т.е. при выборе одного из 5-ти способов проезда «туда» обратно можно вернуться одним из 4-х способов. Поэтому число различных способов проехать из пункта A в пункт B и вернуться обратно, но обязательно другой дорогой, равно $5 \cdot 4 = 20$.

1.9. Сколько существует трёхзначных чисел, в запись которых входит ровно одна цифра 5?

Решение:

Для перечисления всех удовлетворяющих условию задачи чисел рассмотрим три случая.

• *Число начинается на цифру 5.* Вторую цифру (то есть разряд десятков) можно выбрать девятью способами, после чего третью цифру (разряд единиц) можно выбрать также девятью способами. Следовательно, по правилу произведения в данном случае мы получаем $9 \cdot 9 = 81$ число.

• *Цифра 5 — в разряде десятков.* Первую цифру можем выбрать восемью способами, а третью – девятью способами, и поэтому таких чисел $8 \cdot 9 = 72$.

• *Цифра 5 — в разряде единиц.* Таких чисел тоже 72.

Общее количество интересующих нас чисел по правилу суммы равно $81 + 72 + 72 = 225$.

Ответ: 225.

1.10. В шахматном турнире участвуют 9 человек. Каждый из них сыграл с каждым по одной партии. Сколько всего партий было сыграно?

Решение:

Поскольку каждая пара участников играла между собой только один раз, порядок выбора не имеет значения (например, Иванов играл с Петровым, это то же самое, что Петров играл с Ивановым).

Выбрать первого участника в пару можно 9 способами, а второго – 8 способами из оставшихся 8 участников. По правилу умножения получаем $9 \cdot 8 = 72$ пары, в которых каждая пара участников входит дважды (Иванов-Петров и Петров-Иванов). Поскольку порядок выбора не имеет значения, общее количество партий:

$$\frac{9 \cdot 8}{2} = 36 .$$

Ответ: 36.

1.11. В соревнованиях по футболу участвовало 12 команд. Каждая команда провела с каждой из остальных по одной игре на своем поле и по одной игре на поле соперника. Сколько всего игр было сыграно?

Решение:

В данном случае порядок выбора имеет значение. Для каждой игры принимающую команду можно выбрать 12 способами, а команду гостей 11 способами; по правилу произведения общее количество игр равно $12 \cdot 11 = 132$.

Ответ: 132.

Подсчет вариантов с помощью графов. Таблица вариантов

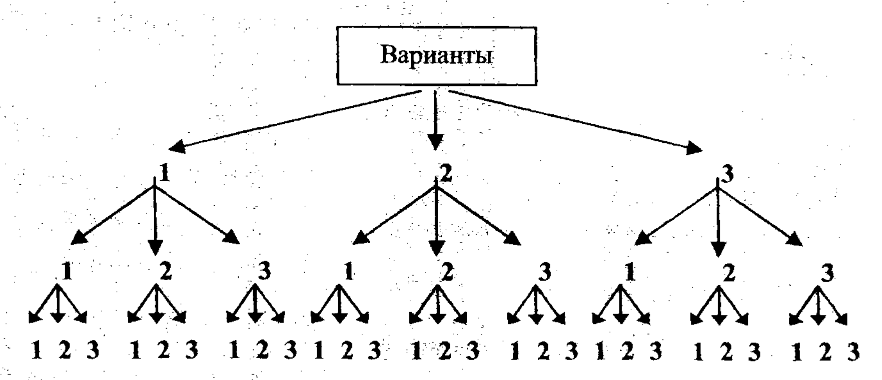
Для решения комбинаторных задач, в которых количество всевозможных комбинаций из заданных элементов велико и процесс их подсчета затруднителен, эффективным приемом, организующим подсчет, является построение графов или составление таблиц.

Графы - геометрические фигуры, состоящие из точек (их называют вершинами графа) и соединяющих их отрезков (называемых ребрами графа). При этом с помощью вершин изображают элементы некоторого множества (предметов, людей, числовых и буквенных кодов и т.д.), а с помощью ребер – определенные связи между этими элементами.

1.12. Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3 при условии, что цифры в числе могут повторяться?

Решение:

На первом месте в трехзначном числе может стоять одна из цифр 1, 2 или 3; на втором и третьем местах – (при условии, что цифры могут повторяться) также любая из трех цифр.



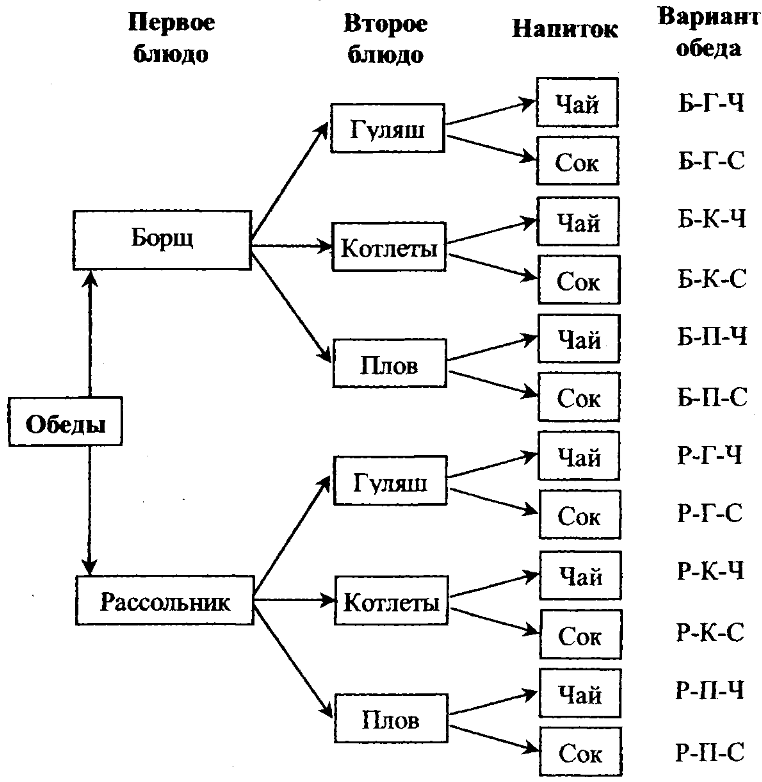
Ответ: 27.

Такой вид графа называют ***дерево***. Вычерчивать дерево вариантов полезно, когда требуется записать все существующие комбинации элементов.

1.13. В кафе на выбор предлагают два первых блюда: борщ (*б*) и рассольник (*р*), три вторых блюда: гуляш (*г*), котлеты (*к*) и плов (*п*), а так же чай (*ч*) или сок (*с*). Укажите все обеды из двух блюд и напитка, которые может заказать посетитель.

Решение:

Построим дерево возможных вариантов.



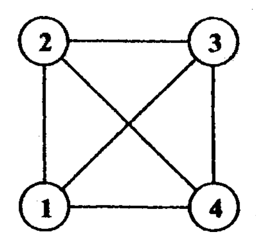
Всего 12 вариантов.

Ответ: 12.

1.14. При встрече каждый из друзей пожал другому руку (каждый пожал каждому). Сколько рукопожатий было сделано, если друзей было четверо?

Решение:

Четырех друзей поместим в вершины графа и проведем все возможные ребра. В данном случае отрезки-ребра обозначают рукопожатия каждой пары друзей.



Из рисунка видно, что граф имеет 6 ребер, значит, и рукопожатий было сделано 6.

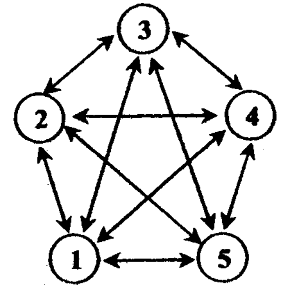
Ответ: 6.

Такой вид графа называют ***полным графом***. Полный граф используется для решения задач, в которых все элементы множества взаимосвязаны.

1.15. По окончании деловой встречи специалисты обменялись визитными карточками (каждый вручил свою карточку каждому). Сколько визитных карточек было роздано, если во встрече принимали участие 5 человек?

Решение:

Пять участников поместим в вершины графа и проведем все возможные ребра. В данном случае стрелки на каждом ребре обозначают переданную визитную карточку. Такой граф называется направленным.



Из рисунка видно, что граф имеет 10 ребер и 20 стрелок соответственно. Значит, было передано 20 визитных карточек.

Ответ: 20.

Еще одним методом подсчета числа комбинаций является таблица вариантов. Ее можно использовать, когда составляемые комбинации состоят из двух элементов.

1.16. Запишите всевозможные двузначные числа, используя при этом цифры 0, 1, 2 и 3. Подсчитайте их количество N.

***Решение*:**

Для подсчета образующих чисел составим таблицу:

1-я цифра	**2-я цифра**			
	0	**1**	**2**	**3**
1	10	11	12	13
2	20	21	22	23
3	30	31	32	33

$N = 3 \cdot 4 = 12$

Ответ: 12.

1.17. Бросаются две игральные кости. Определите количество комбинаций, в которых:

1) сумма числа очков не превосходит 10;

2) произведение числа очков не превосходит 10;

3) произведение числа очков делится на 10.

***Решение*:**

Под игральной костью понимается кубик, на гранях которого написаны цифры от 1 до 6.

Для подсчета комбинаций составим две таблицы – сумм и произведений числа выпавших очков:

Сумма числа очков						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Произведение числа очков						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

1) Подсчитаем количество ячеек в первой таблице, сумма числа очков в которых не превосходит 10:

$N_1 = 36 - 3 = 33$.

2) Подсчитаем количество ячеек во второй таблице, произведение числа очков в которых не превосходит 10:

$N_2 = 6 + 5 + 3 + 2 + 2 + 1 = 19$.

3) Подсчитаем количество ячеек во второй таблице, произведение числа очков в которых делится на 10:

$N_3 = 6$.

Ответ: 1) 33; 2) 19; 3) 6.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

Классическая комбинаторная задача состоит в следующем:

Пусть имеется n предметов. Нужно выбрать некоторые k предметов, где k может принимать значения от 1 до n.

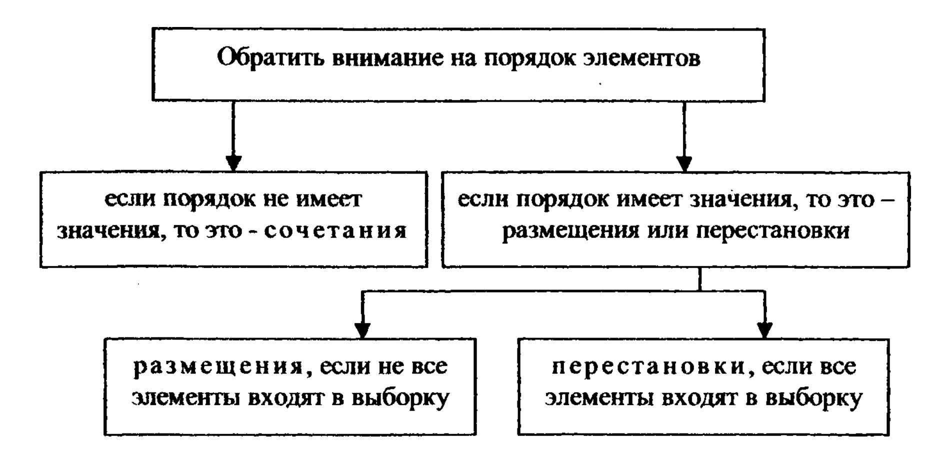
В данном случае выборки могут отличаться друг от друга как составом, так и порядком следования выбранных элементов. В зависимости от этого различают три типа выборок:

P_n - ***перестановки*** из n элементов - различаются только порядком элементов;

A_n^k - ***размещения*** из n элементов по k - различаются составом или порядком следования элементов;

C_n^k – ***сочетания*** из n элементов по k - различаются только составом элементов.

Для того чтобы определить вид выборки, можно руководствоваться следующим правилом:



Если исходное множество состоит из n различных элементов, то при каждом выборе последующего элемента будет рассматриваться новый элемент выборки, отличный от всех предыдущих. Такая выборка называется ***выборкой без повторений***.

Если исходное множество из n элементов можно разбить на несколько классов однотипных элементов, причем внутри каждого класса элементы неразличимы, то при очередном выборе мы можем взять как новый элемент, так и элемент, который уже встречался в предшествующих извлечениях. Такая выборка называется ***выборкой с повторениями***.

Перестановки

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

Составим все перестановки из трех элементов множества $A = \{a; b; c\}$:

$$\{a; b; c\}\ ;\ \{a; c; b\}\ ;\ \{b; a; c\}\ ;\ \{b; c; a\}\ ;\ \{c; a; b\}\ ;\ \{c; b; a\}\ .$$

В каждую перестановку входят одни и те же элементы, но в каждую - в различном порядке, нет ни одной пары комбинаций с одинаковым порядком расположения элементов. Таким образом, перестановка - это упорядоченная последовательность из n различных предметов. Например, книги на полке.

Классическая задача комбинаторики о числе перестановок формулируется так:

скольками способами можно переставить n различных предметов, расположенных на n различных местах?

Число всех возможных перестановок:

$$P_n = n!,$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Заметим, что удобно рассматривать $0!$, полагая, по определению, $0! = 1$.

1.18. Сколькими способами 5 человек могут встать в очередь в театральную кассу?

Решение:

Присвоим каждому человеку номер от 1 до 5. Тогда каждый способ расположения этих людей в очереди будет представлять собой последовательность из 5 цифр, порядок которых может меняться.

Таким образом, задача сводится к подсчету числа перестановок 5 элементов:

$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Ответ: 120 способов.

1.19. Сколькими способами можно с помощью букв K, L, M, N обозначить вершины четырехугольника?

Решение:

Задача сводится к подсчету числа разных способов расположения 4 букв на 4 местах (вершинах), т.е. подсчету числа перестановок 4 элементов:

$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Ответ: 24 способа.

1.20. Сколько существует выражений, тождественно равных произведению $abcde$?

Решение:

$abcde$ - произведение 5 различных сомножителей. Поскольку от перемены мест множителей произведение не меняется, всего существует P_5 различных вариантов расположения множителей.

$P_5 = 5! = 120$

Вариант $abcde$ считаем исходным. Остальные 119 выражений ему тождественно равны.

Ответ: 119 выражений.

Для решения следующих задач воспользуемся приемом, который называется **«фиксирование» элементов**:

Пусть исходное множество состоит из n элементов, из данного множества требуется выбрать некоторые k элементов. Если в условии задачи сказано, что один или несколько элементов должны занимать определенные места в каждой формируемой комбинации из k элементов, уменьшим число элементов n и количество мест k на число «фиксированных» элементов и найдем количество способов расположения оставшихся элементов на оставшихся местах.

В случае необходимости найденное количество комбинаций умножим на число перестановок «фиксированных» элементов между собой на их местах.

1.21. Одиннадцать футболистов строятся перед началом матча для приветствия. Первым становится капитан, вторым – вратарь, а остальные – произвольным образом. Сколько существует способов построения?

Решение:

Всего 11 членов команды на одиннадцати местах, но два элемента фиксированы, то есть не переставляются (на первом месте капитан, на втором – вратарь). Число способов построения при этом равно числу перестановок 9 оставшихся человек:

$P_9 = 9! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 362\ 880$.

Ответ: 362 880 способов.

1.22. Сколько четных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 5, 7, если каждая цифра может быть использована только один раз?

Решение:

Число четное, если его последняя цифра четная.

В заданном наборе цифр имеется только одна четная цифра – 2, фиксируем ее в младшем разряде (разряде единиц), а оставшиеся три цифры 1, 5 и 7 можно расположить в трех старших разрядах произвольным образом. Значит, число способов построения четных четырехзначных чисел, удовлетворяющих условию задачи, равно числу перестановок 3 оставшихся цифр:

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Ответ: 6 чисел.

Для решения следующих задач воспользуемся приемом, который называется **подсчет «ненужных» вариантов**:

Часто, для того чтобы найти число комбинаций, удовлетворяющих нужному свойству, удобнее найти число комбинаций, не обладающих заданным свойством, и вычесть его из общего числа возможных комбинаций.

1.23. Сколько шестизначных чисел без повторения цифр можно составить из цифр 0, 1, 2, 5, 7, 9?

Решение:

Воспользуемся методом исключения лишних вариантов.

Дано 6 цифр, из них можно составлять различные шестизначные числа, переставляя эти цифры местами. Количество различных комбинаций при этом равно $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

В 720 комбинациях присутствуют числовые варианты, у которых на первом месте стоит нуль, что недопустимо. Найдем количество недопустимых вариантов. Если на первом месте стоит нуль (он фиксирован), то на последующих пяти местах могут стоять в произвольном порядке «ненулевые» цифры 1, 2, 5, 7, 9. Количество различных способов, которыми можно разместить 5 цифр на 5 местах, равно $P_5 = 5! = 120$. То есть количество шестизначных комбинаций, начинающихся с нуля равно 120.

Искомое количество различных шестизначных чисел равно:

$$P_6 - P_5 = 720 - 120 = 600.$$

Ответ: 600 чисел.

1.24. Для того чтобы открыть сейф нужно набрать шифр, содержащий определенную последовательность из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и другой шифр, содержащий последовательность из букв *a*, *b*, *c*, *d*, в которых буквы и цифры не повторяются. Сколько существует комбинаций, при которых сейф не открывается?

Решение:

Из шести цифр можно составить $P_6 = 6! = 720$ комбинаций. Соответственно из четырех букв можно составить $P_4 = 4! = 24$ комбинаций. Тогда общее количество возможных комбинаций для открытия сейфа по теореме умножения: $P_6 \cdot P_4 = 720 \cdot 24 = 17280$.

Сейф можно открыть только одной комбинацией, следовательно, количество комбинаций, при которых сейф не открывается равно:

$P_5 \cdot P_4 - 1 = 17279$

Ответ: 17 279.

1.25. Сколько среди четырехзначных чисел, составленных из цифр 3, 5, 7, 9 без повторения, таких, которые кратны 15?

Решение:

Сумма заданных цифр $3+5+7+9=24$ кратна 3, следовательно, любое четырехзначное число, составленное из этих цифр, делится на 3. Для того чтобы составленное число делилось еще и на 15, необходимо, чтобы оно оканчивалось цифрой 5

Фиксируем на последнем месте цифру 5, оставшиеся три цифры можно разместить на трех оставшихся перед цифрой 5 местах $P_3 = 3! = 6$ различными способами. Следовательно, существует 6 различных четырехзначных чисел, составленных из заданных цифр, кратных 15.

Ответ: 6 чисел.

1.26. Сколько чисел без повторения цифр можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, таких, которые больше 3 000?

Решение:

Среди чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, больше 3 000 будут четырехзначные числа, начинающиеся с цифр 3 или 4.

Фиксируем на первом месте цифру 3, тогда на следующих за ним трех местах оставшиеся три цифры 1, 2, 4 можно расставить $P_3 = 3! = 6$ способами.

Фиксируем на первом месте цифру 4, тогда на следующих за ним трех местах оставшиеся три цифры 1, 2, 3 можно расставить $P_3 = 3! = 6$ способами.

Всего таких чисел по теореме сложения будет 12.

Ответ: 12 чисел.

1.27. Сколько пятизначных чисел, кратных 5, можно образовать из цифр 0, 1, 2, 3, 5 при условии, что каждая цифра входит в пятизначное число только один раз?

Решение:

Для того чтобы число было кратным 5, необходимо, чтобы его последняя цифра являлась 0 или 5.

Фиксируем на последнем месте цифру 0, тогда остальные четыре цифры, стоящие перед 0, можно переставить $P_4 = 4! = 24$ способами.

Аналогично фиксируем на последнем месте цифру 5, тогда остальные четыре цифры, стоящие перед 5, также можно переставить $P_4 = 4! = 24$ способами. Но при этом надо исключить случаи, когда на первом месте стоит 0, а на последнем 5 (то есть первый и последний элемент фиксированы), таких чисел будет $P_3 = 3! = 6$. Таким образом, получаем $24 - 6 = 18$ пятизначных чисел, оканчивающихся цифрой 5.

По теореме сложения общее количество чисел, удовлетворяющих условию задачи, $24 + 18 = 42$.

Ответ: 42 числа.

Для решения следующих задач воспользуемся приемом, который называется **«склеивание» элементов**:

Пусть исходное множество состоит из n элементов, из заданного множества требуется выбрать некоторые k элементов. Если в условии задачи сказано, что в составляемых комбинациях m элементов всегда должны стоять рядом $(m \geq 2)$, будем рассматривать эти элементы как один новый элемент «склеенный» из m исходных. Уменьшим число элементов n и количество мест k на число $m-1$ и найдем количество способов расположения оставшихся $n-(m-1)$ элементов на оставшихся $k-(m-1)$ местах.

В случае необходимости найденное количество способов умножим на число перестановок «склеенных» элементов между собой в «склейке».

1.28. Семь мальчиков, в число которых входят Олег и Игорь, становятся в ряд. Найдите число возможных комбинаций, если Олег и Игорь должны стоять рядом.

Решение:

Пусть Олег и Игорь стоят рядом в порядке ОИ. Будем рассматривать эту пару как единый элемент, переставляемый с другими пятью элементами – оставшимися мальчиками. Число возможных комбинаций тогда будет $P_6 = 6! = 720$.

Если Олег и Игорь будут стоять в порядке ИО, по аналогии с предыдущим случаем, получаем еще $P_6 = 6! = 720$ комбинаций.

Общее число комбинаций, в которых Олег и Игорь стоят рядом (в любом порядке) по теореме сложения равно $720 + 720 = 1\,440$.

Ответ: 1 440 комбинаций.

1.29. Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг, из которых 5 книг – это сборники стихов, так, чтобы сборники стихов стояли рядом?

Решение:

Из 12 книг нужно «склеить» 5, это сборники стихов. Сделать «склейку» можно $P_5 = 5! = 120$ различными способами.

После этого получим 8 элементов: 7 оставшихся книг + «склейка». Число различных перестановок из 8 элементов равно $P_8 = 8! = 40\,320$.

Общее число способов расстановки 12 книг, из которых 5 должны стоять рядом, равно $120 \cdot 40\,320 = 4\,838\,400$.

Ответ: 4 838 400 способов.

1.30. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 одинаковых ладей так, чтобы никакие две из них не били друг друга?

Решение:

Ладьи не будут бить друг друга тогда и только тогда, когда на каждой горизонтали и каждой вертикали стоит ровно одна ладья. Поэтому будем расставлять ладьи по горизонталям. Первую ладью можно поставить на любые 8 полей первой горизонтали, вторую на 7 полей второй горизонтали (одна вертикаль уже занята первой ладьей) и т.д. Получаем: $P_8 = 8! = 40320$ способов.

Ответ: 40 320 способов.

1.32. В классе 15 мальчиков и 15 девочек. Сколькими способами их можно разбить на пары танцевать вальс на концерте?

Решение:

Рассмотрим первого мальчика – он может танцевать с любой из 15 девочек, второй мальчик может танцевать с любой из 14 оставшихся девочек и т.д. Таким образом, получаем $P_{15} = 15!$ способов.

Ответ: 15! способов.

1.33. В классе 15 мальчиков и 15 девочек. Сколькими способами можно рассадить их за пятнадцатью партами так, чтобы за каждой партой мальчик сидел слева, а девочка справа?

Решение:

Начнем с мальчиков: за первую парту можно посадить любого из 15, за вторую – одного из 14 оставшихся и т.д. Получаем $P_{15} = 15!$ способов.

Для девочек совершенно аналогично получаем $P_{15} = 15!$ способов.

Общее число способов по правилу произведения равно $P_{15} \cdot P_{15} = (15!)^2$.

Отличие данной задачи от предыдущей заключается в том, что в случае, когда ребята рассаживаются по партам, важен порядок, то есть первая пара должна садится за первую парту, пятнадцатая – за последнюю. В предыдущей задаче порядок пар не важен, поскольку ребята становятся в круг, и нет ни первой пары, ни последней.

Ответ: $(15!)^2$ способов.

1.34. В классе 15 мальчиков и 15 девочек. Сколькими способами можно рассадить их за пятнадцатью партами так, чтобы каждый мальчик сидел с девочкой?

Решение:

Для того чтобы ответить на поставленный вопрос, нужно результат, полученный в предыдущей задаче, увеличить в 2^{15} раза, потому что каждую пару, полученную по способу решения предыдущей задачи, можно посадить двумя способами: первый раз – мальчик справа, второй – мальчик слева. Получаем $15!^2 \cdot 2^{15}$.

Отличие данной задачи от двух предыдущих заключается в том, что в приведенной задаче важен не только порядок пар, но и порядок мест в паре.

Ответ: $15!^2 \cdot 2^{15}$ способов.

Выше предполагалось, что все n элементов заданного множества различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае комбинации с повторениями вычисляют по другим формулам. Например, если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д., то число перестановок с повторениями:

$$P_n(n_1, n_2, ...) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ...},$$

где $n_1 + n_2 + ... = n$.

1.35. Сколько слов можно составить, переставив буквы в слове «экзамен» и в слове «математика»?

Решение:

1) В слове «экзамен» все буквы различны, поэтому используем формулу для числа перестановок без повторений:

$P_7 = 7! = 5040$.

2) В слове «математика» 2 буквы «м», 3 буквы «а», 2 буквы «т», поэтому число перестановок всех букв разделим на число перестановок повторяющихся букв:

$$P_{10}(2; 3; 2; 1; 1; 1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 151\,200.$$

Ответ: 5 040 и 151 200 слов.

1.36. Сколькими способами можно записать в виде произведения простых множителей число 120?

Решение:

Число 120 разлагается на 5 простых множителей, из которых три одинаковые:

$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

В этом случае: $P_5(3; 1; 1) = \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$.

Ответ: 20 способов.

1.37. Сколькими способами можно закрасить 6 клеток так, чтобы 2 клетки были закрашены красным цветом, а 4 другие – белым, черным, синим и зеленым (каждым цветом – одна клетка)?

Решение:

Нужно найти различные перестановки из 6 элементов, среди которых - два одинаковые:

$$P_6(2;1;1;1;1)=\frac{6!}{2!}=\frac{720}{2}=360$$

Ответ: 360 способов.

1.38. Сколькими способами можно разделить 11 спортсменов на 3 группы по 4, 5 и 2 человека соответственно?

Решение:

Сделаем карточки с номерами групп:

- четыре карточки с номером 1,

- пять карточек с номером 2,

- две карточки с номером 3.

Будем раздавать эти карточки спортсменам, и каждый способ раздачи будет соответствовать разбиению спортсменов на группы. Таким образом, нам необходимо подсчитать число перестановок для 11 карточек, среди которых четыре одинаковые карточки с номером 1, пять карточек с одним и тем же номером 2 и две карточки с номером 3.

$$P_{11}(4;5;2)=\frac{11!}{4!\cdot 5!\cdot 2!}=\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2}=6\,930$$

Ответ: 6 930 способов.

Размещения

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по k элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо порядком следования.

Составим все размещения по 2 элемента из трех элементов множества $A=\{a;\ b;\ c\}$:

$$\{a;\ b\};\ \{b;\ a\};\ \{a;\ c\};\ \{c;\ a\};\ \{b;\ c\};\ \{c;\ b\}.$$

Каждая из вышеперечисленных комбинаций отличается от любой другой либо составом элементов, либо порядком их расположения, либо и тем и другим одновременно. Таким образом, размещения - это упорядоченные k - элементные подмножества исходного множества из n

элементов. Например, любое размещение части присутствующих в зале людей на стульях первого ряда.

Классическая задача комбинаторики о числе размещений формулируется так:

сколькими способами можно выбрать и разместить по k различным местам k различных предметов из n имеющихся в наличии различных предметов?

Число всех возможных размещений:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1).$$

1.39. Сколькими способами можно разместить на полке 5 из 8 различных книг?

Решение:

$$A_8^5 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 6\ 720$$

Ответ: 6 720 способов.

1.40. Сколькими способами можно вызвать по очереди к доске 4 учеников из 7?

Решение:

Задача сводится к подсчету числа размещений из 7 элементов по 4:

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 840$$

Ответ: 840 способов.

1.41. Сколькими способами можно изготовить трехцветный флаг с горизонтальными полосами, если имеется материал 7 различных цветов?

Решение:

Задача сводится к подсчету числа размещений из 7 элементов по 3:

$$A_7^3 = \frac{7!}{4!} = 7\cdot 6\cdot 5 = 210$$

Ответ: 210 способов.

1.42. Сколькими способами могут быть распределены первая, вторая и третья премии между 15 участниками конкурса?

Решение:

Найдем число размещений из 15 элементов по 3:

$A_{15}^3 = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2\,730$.

Ответ: 2 730 способов.

1.43. Абонент забыл последние 3 цифры номера телефона. Какое максимальное число номеров ему нужно перебрать, если он вспомнил, что три последние цифры различны?

Решение:

Задача сводится к поиску различных перестановок 3 элементов из 10 (так как цифр всего 10).

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7!} = 720$$

Ответ: 720 чисел.

1.44. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 составьте четырехзначные числа, в которых все цифры различны, а первой цифрой является 1, второй – 3. Сколько таких чисел?

Решение:

По условию задачи первые две цифры четырехзначного числа должны быть 1 и 3, то есть первые два элемента числовой комбинации фиксированы, тогда на следующих за ними двух местах оставшиеся четыре цифры 2, 4, 5, 6 можно расставить $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$ способами. Таким образом, существует 12 чисел, удовлетворяющих условию задачи.

Ответ: 12 чисел.

1.45. Сколько существует четырехзначных чисел, у которых все цифры различны?

Решение:

В старшем разряде (разряде единиц тысяч) не может быть нуля, т.е возможны 9 вариантов цифры, которая стоит на первом месте.

В остальных трех разрядах не может быть цифры, стоящей в разряде единиц тысяч (так как все цифры должны быть различны),

поэтому число вариантов вычислим по формуле размещений без повторений из 9 по 3:

$$A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504 .$$

По правилу умножения получим $9 \cdot A_9^3 = 4\ 536$ чисел.

Ответ: 4 536 чисел.

1.46. Сколько сигналов можно подать пятью различными флажками, поднимая их в любом количестве и в произвольном порядке?

Решение:

Поскольку в нашем распоряжении имеется 5 флажков, мы можем подавать различные сигналы, состоящие из 1, 2, 3, 4 или всех 5 флажков.

$$A_5^1 + A_5^2 + A_5^3 + A_5^4 + A_5^5 = \frac{5!}{4!} + \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{1!} + \frac{5!}{0!} =$$

$$= 5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325$$

Ответ: 325 сигналов.

1.47. Сколько различных натуральных чисел, меньших 1 000, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 без повторения цифр в числе?

Решение:

Меньше 1 000 можно составить только трехзначные, двузначные и однозначные числа. Поскольку цифры, входящие в запись числа, должны быть различны, всего таких чисел из заданного набора можно получить:

$$A_7^1 + A_7^2 + A_7^3 = 7 + 7 \cdot 6 + 7 \cdot 6 \cdot 5 = 7(1 + 6 + 30) = 259 .$$

Ответ: 259 чисел.

1.48. Номер машины в некотором городе состоит из двух различных букв, взятых из набора *М*, *Н*, *К*, *Т*, *С* и трех различных цифр. Сколько машин можно обеспечить такими номерами?

Решение:

Выбираем 2 буквы из 5 и 3 цифры из 10, выборка без повторений с учетом порядка.

Количество способов для выбора букв: $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$.

Количество способов для выбора цифр: $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Каждый вариант выбора букв может сочетаться с любым из вариантов выбора цифр, поэтому общее количество номеров машин по правилу произведения:

$$A_5^2 \cdot A_{10}^3 = 20 \cdot 720 = 14\,400$$

Ответ: 14 400 номеров.

1.49. Сколько можно составить из цифр 1, 2, 3, ... 9 шестизначных чисел, таких, у которых нечетные цифры стоят на нечетных местах, а четные – на четных?

Решение:

Пять нечетных цифр из заданного набора (1, 3, 5, 7, 9) можно расположить на трех нечетных местах в шестизначном числе A_5^3 способами.

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Четыре четных числа (2, 4, 6, 8) можно расположить на трех четных местах в шестизначном числе A_4^3 способами.

$$A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Каждый вариант размещения нечетных цифр может сочетаться с любым вариантом размещения четных цифр, поэтому общее количество шестизначных чисел, удовлетворяющих условию задачи, по правилу произведения:

$$A_5^3 \cdot A_4^3 = 60 \cdot 24 = 1\,440.$$

Ответ: 1 440 чисел.

1.50. Из группы туристов требуется выбрать дежурного и его помощника. Если туристов было бы на одного больше, то возможностей выбора было бы в 1,25 раза больше. Сколько туристов в группе?

Решение:

По условию задачи:

$$A_{n+1}^2 = 1,25 \cdot A_n^2$$

$$(n+1)n = 1,25 \cdot n(n-1)$$

$$n+1 = 1,25(n-1)$$

$0,25n = 2,25$

$n = 9$

Ответ: 9 туристов.

В случае если элементы в размещениях могут повторяться, число размещений из n элементов по k с повторениями вычисляется по формуле:

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

К примеру, составим все размещения по 2 элемента с повторениями из множества $A = \{a; b; c\}$:

$\{a; b\}$; $\{b; a\}$; $\{a; c\}$; $\{c; a\}$; $\{b; c\}$; $\{c; b\}$; $\{a; a\}$; $\{b; b\}$; $\{c; c\}$.

1.51. В лифт 9 этажного дома зашли 7 человек. Сколькими способами они могут распределиться по этажам дома?

Решение:

Очевидно, что на первом этаже никому выходить не надо. Каждый из 7 человек может выбрать любой из 8 этажей, поэтому можно применить формулу для числа размещений с повторениями из 8 (этажей) по 7 (на каждого человека по одному этажу): $\overline{A}_8^7 = 8^7 = 2\ 097\ 152$.

Ответ: 2 097 152 способов.

1.52. Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждая цифра может в записи числа встречаться несколько раз?

Решение:

Две последние цифры в четырехзначных числах, составленных из заданного набора цифр и кратных 4, найдем прямым перебором: 12, 24, 32, 44, 52. Итого, пять возможных вариантов.

Тогда количество вариантов для оставшихся первой и второй цифр в числе с учетом того, что цифры могут повторяться, равно $\overline{A}_5^2 = 5^2 = 25$.

По правилу умножения существует $5 \cdot \overline{A}_5^2 = 125$ различных четырехзначных чисел, удовлетворяющих поставленным условиям.

Ответ: 125 чисел.

1.53. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5?

***Решение*:**

Всего из заданного набора цифр можно составить $\overline{A}_6^3$ различных трехзначных числовых комбинаций (с учетом того, что цифры в числе могут повторяться).

$\overline{A}_6^3 = 6^3 = 216$

Исключим из этих 216 комбинаций такие, в которых первая цифра 0 (фиксируем один элемент), а две последующие – любые из исходного набора 0, 1, 2, 3, 4, 5. Таких чисел будет $\overline{A}_6^2 = 6^2 = 36$.

Следовательно, из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 можно составить $\overline{A}_6^3 - \overline{A}_6^2$ различных трехзначных чисел.

$\overline{A}_6^3 - \overline{A}_6^2 = 216 - 36 = 180$

Ответ: 180 чисел.

1.54. У жителей планеты ХО в алфавите три буквы: А, О, Х. Слова в языке состоят не более чем из трех букв (буква в слове может повторяться). Какое наибольшее число слов может быть в словаре жителей этой планеты?

***Решение*:**

Слова могут быть однобуквенные, двухбуквенные и трехбуквенные. Однобуквенных слов может быть три: А, О, Х.

Двухбуквенных слов может быть $\overline{A}_3^2 = 3^2 = 9$.

Трехбуквенных слов может быть $\overline{A}_3^3 = 3^3 = 27$.

Таким образом, в словаре жителей планеты ХО может быть максимум $3 + 9 + 27 = 39$ слов.

Ответ: 39 слов.

$0,25n = 2,25$

$n = 9$

Ответ: 9 туристов.

В случае если элементы в размещениях могут повторяться, число размещений из n элементов по k с повторениями вычисляется по формуле:

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

К примеру, составим все размещения по 2 элемента с повторениями из множества $A = \{a; b; c\}$:

$\{a; b\}$; $\{b; a\}$; $\{a; c\}$; $\{c; a\}$; $\{b; c\}$; $\{c; b\}$; $\{a; a\}$; $\{b; b\}$; $\{c; c\}$.

1.51. В лифт 9 этажного дома зашли 7 человек. Сколькими способами они могут распределиться по этажам дома?

Решение:

Очевидно, что на первом этаже никому выходить не надо. Каждый из 7 человек может выбрать любой из 8 этажей, поэтому можно применить формулу для числа размещений с повторениями из 8 (этажей) по 7 (на каждого человека по одному этажу): $\overline{A}_8^7 = 8^7 = 2\ 097\ 152$.

Ответ: 2 097 152 способов.

1.52. Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждая цифра может в записи числа встречаться несколько раз?

Решение:

Две последние цифры в четырехзначных числах, составленных из заданного набора цифр и кратных 4, найдем прямым перебором: 12, 24, 32, 44, 52. Итого, пять возможных вариантов.

Тогда количество вариантов для оставшихся первой и второй цифр в числе с учетом того, что цифры могут повторяться, равно $\overline{A}_5^2 = 5^2 = 25$.

По правилу умножения существует $5 \cdot \overline{A}_5^2 = 125$ различных четырехзначных чисел, удовлетворяющих поставленным условиям.

Ответ: 125 чисел.

1.53. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5?

Решение:

Всего из заданного набора цифр можно составить $\overline{A}_6^3$ различных трехзначных числовых комбинаций (с учетом того, что цифры в числе могут повторяться).

$\overline{A}_6^3 = 6^3 = 216$

Исключим из этих 216 комбинаций такие, в которых первая цифра 0 (фиксируем один элемент), а две последующие – любые из исходного набора 0, 1, 2, 3, 4, 5. Таких чисел будет $\overline{A}_6^2 = 6^2 = 36$.

Следовательно, из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 можно составить $\overline{A}_6^3 - \overline{A}_6^2$ различных трехзначных чисел.

$\overline{A}_6^3 - \overline{A}_6^2 = 216 - 36 = 180$

Ответ: 180 чисел.

1.54. У жителей планеты ХО в алфавите три буквы: А, О, Х. Слова в языке состоят не более чем из трех букв (буква в слове может повторяться). Какое наибольшее число слов может быть в словаре жителей этой планеты?

Решение:

Слова могут быть однобуквенные, двухбуквенные и трехбуквенные. Однобуквенных слов может быть три: А, О, Х.

Двухбуквенных слов может быть $\overline{A}_3^2 = 3^2 = 9$.

Трехбуквенных слов может быть $\overline{A}_3^3 = 3^3 = 27$.

Таким образом, в словаре жителей планеты ХО может быть максимум $3 + 9 + 27 = 39$ слов.

Ответ: 39 слов.

Сочетания

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по k элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Составим все сочетания по 3 элемента из четырех элементов множества $A = \{a; b; c; d\}$:

$$\{a; b; c\};\ \{a; b; d\};\ \{a; c; d\};\ \{b; c; d\}.$$

Каждая из вышеперечисленных комбинаций отличается от любой другой хотя бы одним входящим в нее элементом; нет ни одной пары комбинаций с одинаковым составом элементов (комбинации $\{a; b; c\}$; $\{a; c; b\}$; $\{b; a; c\}$ и т.д. считаются тождественными). Таким образом, сочетания - это НЕупорядоченные k- элементные подмножества исходного множества из n элементов. Например, назначение двух дежурных по классу из списка учеников.

Классическая задача комбинаторики о числе сочетаний формулируется так:

сколькими способами можно выбрать k различных предметов из n имеющихся в наличии различных предметов?

Число сочетаний: $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Подчеркнем, что числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством:

$$A_n^k = P_n \cdot C_n^k$$

1.55. Сколькими различными способами можно выбрать из 15 человек делегацию в составе трех человек?

Решение:

Различными будем считать те делегации, которые отличаются хотя бы одним членом. Таким образом, задача сводится к подсчету числа сочетаний из 15 элементов по 3.

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{3! \cdot (15-3)!} = \frac{12! \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{3! \cdot 12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455.$$

Следовательно, имеется 455 различных способов избрания этой делегации.

Ответ: 455 способов.

1.56. Сколькими способами можно выбрать 3 дежурных из из 5 учащихся, если:

1) они все дежурят в столовой?

2) один дежурный ушел в столовую, второй – в раздевалку, третий – мыть полы в класс?

Решение:

1) поскольку все 3 ученика дежурят в одном и том же месте, порядок в данном случае не важен и искомое число: $C_5^3 = 10$.

2) поскольку все 3 ученика дежурят в разных местах, размещения могут отличаться не только составом но и порядком (местом, где дежурят учащиеся), поэтому искомое число: $A_5^3 = 60$.

Ответ: 1) 10; 2) 60.

1.57. На плоскости расположены n точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сколько различных прямых можно провести через эти точки?

Решение:

Так как через каждую пару точек можно провести лишь одну прямую, то число всех прямых равно числу сочетаний из n по 2, т. е.

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{(n-2)!\cdot(n-1)\cdot n}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ответ: $\frac{n(n-1)}{2}$ прямых.

1.58. Сколько всего диагоналей в выпуклом n-угольнике?

Решение:

Рассмотрим n точек на плоскости, которые являются вершинами выпуклого n-угольника. Через n точек можно провести не более C_n^2 прямых. Таким образом, число всех отрезков, соединяющих n вершин выпуклого n-угольника равно C_n^2, из которых n - стороны выпуклого n-угольника, а остальные – диагонали. Тогда число диагоналей:

$$C_n^2 - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Ответ: $\frac{n(n-3)}{2}$ диагонали.

1.59. Имеются лотерейные билеты, перенумерованные от 1 до 20. Сколькими способами из них можно выбрать 3 билета так, чтобы среди выбранных билетов хотя бы один имел номер, больший 15?

Решение:

Из 20 лотерейных билетов выбрать 3 можно C_{20}^3 способами.

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{3!\cdot 17!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3} = 1140$$

Условие задачи о том, что хотя бы один билет имеет номер, больший 15, означает, что в выборке один билет, или два, или все три должны иметь номера больше 15. Для того чтобы определить количество таких комбинаций удобнее найти сначала количество вариантов выбора, в которых все три билета имеют номера, меньшие или равные 15, а затем отнять полученное количество от общего числа вариантов.

Количество комбинаций, в которых все три билета имеют номера, меньшие или равные 15:

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{3!\cdot 12!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3} = 455.$$

Тогда искомое число способов:

$$C_{20}^3 - C_{15}^3 = 1140 - 455 = 685.$$

Ответ: 685 способов.

1.60. В классе учатся 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории требуется выделить четырех мальчиков и трех девочек. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

4 мальчиков из 16 можно выбрать C_{16}^4 способами.

3 девочек из 12 можно выбрать C_{12}^3 способами.

Поскольку каждый вариант выбора мальчиков может сочетаться с любым вариантом выбора девочек, по правилу произведения общее количество способов равно:

$$C_{16}^4 \cdot C_{12}^3 = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{2 \cdot 3} = 400\,400.$$

Ответ: 400 400 способов.

1.61. Сколькими способами можно распределить уроки в шести классах между тремя учителями, если каждый учитель будет преподавать в двух классах?

Решение:

Первый учитель может выбрать два класса из шести C_6^2 различными способами. После выбора первого учителя второй может выбрать два класса из четырех оставшихся C_4^2 различными способами. Тогда два учителя могут выбрать по два класса $C_6^2 \cdot C_4^2$ различными способами. Если они уже сделали выбор, то третий может взять только оставшиеся два класса.

Поэтому искомое число:

$$C_6^2 \cdot C_4^2 = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 90.$$

Ответ: 90 способов.

1.62. Для ремонта школы прибыла бригада, состоящая из 12 человек. Трех из них надо отправить на четвертый этаж, а четырех – на пятый. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

1) Во-первых, выберем трех рабочих из 12, которые будут работать на четвертом этаже. Это можно сделать C_{12}^3 способами.

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 220$$

2) Во-вторых, выберем четырех человек из оставшихся в бригаде 9 человек, для того чтобы отправить их работать на пятый этаж.

Это можно сделать C_9^4 способами.

$$C_9^4 = \frac{9!}{4!\cdot 5!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{24} = 126$$

По правилу произведения общее число способов:

$$C_{12}^3 \cdot C_9^4 = 220\cdot 126 = 27\ 720\ .$$

Ответ: 27 720 способов.

1.63. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, нужно выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин. Сколькими способами можно это сделать?

Решение:

Женщин может быть выбрано 2, 3 или 4.

Из 4 женщин 2 женщины могут быть выбраны C_4^2 способами. При каждом способе выбора женщин к ним нужно присоединить 4 мужчин. Это можно сделать C_7^4 способами.

Таким образом, если будут выбраны только две женщины, то это можно сделать $C_4^2 \cdot C_7^4$ способами.

Точно так же, если выберут трех женщин и соответственно трех мужчин, то это можно сделать $C_4^3 \cdot C_7^3$ способами.

Если выберут четырех женщин и соответственно двух мужчин, то это можно сделать $C_4^4 \cdot C_7^2$ способами.

Таким образом, выбор 6 человек при заданных условиях можно осуществить $C_4^2 \cdot C_7^4 + C_4^3 \cdot C_7^3 + C_4^4 \cdot C_7^2$ способами.

$$C_4^2 \cdot C_7^4 + C_4^3 \cdot C_7^3 + C_4^4 \cdot C_7^2 = \frac{4\cdot 3}{2}\cdot\frac{7\cdot 6\cdot 5}{6} + 4\cdot\frac{7\cdot 6\cdot 5}{6} + \frac{7\cdot 6}{2} =$$

$$= 210 + 140 + 21 = 371$$

Ответ: 371 способ.

1.64. На плоскости отметили точку. Из нее провели 9 лучей. Сколько получилось при этом углов?

Решение:

Каждые два луча, исходящие из одной точки, образуют угол. Из 9 лучей можно образовать C_9^2 пар, следовательно, общее количество углов равно:

$$C_9^2 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36.$$

Ответ: 36 углов.

1.65. Из группы туристов четырех дежурных можно выбрать в 13 раз большим количеством способов, чем двух дежурных. Сколько туристов в группе?

Решение:

Пусть в группе n туристов. Выбрать из них четырех дежурных можно C_n^4 различными способами, а двух дежурных - C_n^2 способами. По условию задачи:

$$C_n^4 = 13 \cdot C_n^2$$

$$\frac{n!}{4! \cdot (n-4)!} = 13 \cdot \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!}$$

$$\frac{(n-4)! \cdot (n-3)(n-2)(n-1)n}{4! \cdot (n-4)!} = 13 \cdot \frac{(n-2)! \cdot (n-1)n}{2! \cdot (n-2)!}$$

$$\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{24} = 13 \cdot \frac{(n-1)n}{2}$$

$$(n-3)(n-2) = 13 \cdot 12$$

Очевидно, что единственное допустимое решение $n = 15$.

Ответ: 15 туристов.

Следующая задача иллюстрирует свойство биномиальных коэффициентов:

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

1.66. Сколькими способами группу из 12 человек можно разбить на две группы 1) по 4 и 8 человек; 2) по 5 и 7 человек?

Решение:

1) $C_{12}^4 = \frac{12!}{4!\cdot 8!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4} = 495$

$C_{12}^8 = \frac{12!}{8!\cdot 4!} = 495 = C_{12}^4$

495 способов разбиения на 4 и 8 человек.

2) $C_{12}^5 = C_{12}^7 = \frac{12!}{5!\cdot 7!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 792$

792 способа разбиения на 5 и 7 человек.

Ответ: 1) 495 способов; 2) 792 способа.

Следующие две задачи иллюстрируют свойство биномиальных коэффициентов:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

1.67. Сколькими способами 4 различные монеты можно разложить по двум карманам?

Решение:

$C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 = 16$

Ответ: 16 способов.

1.68. У Антона шесть друзей. Он может пригласить в гости одного или нескольких из них. Определите общее число возможных вариантов.

Решение:

Антон может пригласить в гости одного, или двух, или трех, или четырех, или пятерых, или шестерых друзей.

Общее число вариантов выбора:

$C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6 - C_6^0 = 64 - 1 = 63$

Ответ: 63 способа.

1.69. Встретились несколько человек и стали здороваться друг с другом. Известно, что рукопожатий было от 60 до 70. Сколько человек встретились, если известно, что:

1) каждый здоровался с каждым;

2) только один человек не здоровался ни с кем;

3) только двое не поздоровались между собой;

4) четверо поздоровались только между собой?

Решение:

1) Число рукопожатий составляет C_n^2.

По условию задачи:

$$60 \le C_n^2 \le 70$$

$$60 \le \frac{n(n-1)}{2} \le 70$$

$$120 \le n(n-1) \le 140$$

n легко находится подбором: $n = 12$, поскольку $12 \cdot 11 = 132$.

2) Если один человек не здоровался ни с кем, то пары образовывались из $n-1$ элемента, т.е.

$$60 \le C_{n-1}^2 \le 70$$

$$120 \le (n-1)(n-2) \le 140$$

По аналогии с предыдущим случаем n легко находится подбором: $n = 13$.

3) Если двое не поздоровались между собой, то количество рукопожатий было на 1 меньше:

$$60 \le C_n^2 - 1 \le 70$$

$$61 \le C_n^2 \le 71$$

$$122 \le n(n-1) \le 142$$

$n = 12$.

4) В данном случае группа разделилась на две подгруппы из 4 и $n-4$ человек. Рукопожатиями обменивались исключительно люди внутри подгруппы.

$$60 \le C_{n-4}^2 + C_4^2 \le 70$$

$60 \le C_{n-4}^2 + 6 \le 70$

$54 \le C_{n-4}^2 \le 64$

$108 \le (n-4)(n-5) \le 128$

$n-4=11$ или $n=15$.

Ответ: 1) 12; 2) 13; 3) 12; 4) 15.

Пусть имеется n групп элементов (в каждой группе достаточно много элементов), таких, что элементы внутри группы неразличимы между собой, а элементы разных групп различимы. Из совокупности всех элементов возьмем подмножество, содержащее k элементов. Это подмножество из k элементов определяется числом взятых элементов из 1-ой группы, числом взятых элементов из 2-ой группы, и т.д. Число различных способов образования k-элементного множества в этом случае находится по формуле числа различных сочетаний с повторениями.

Количество различных сочетаний из n элементов по k с неограниченными повторениями равно:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}.$$

1.70. Как велико число различных результатов бросаний двух неотличимых друг от друга кубиков?

Решение:

В результате подбрасывания каждого кубика возможно 6 исходов, следовательно, при бросании двух одинаковых кубиков возможно $\overline{C}_6^2$ исходов.

$$\overline{C}_6^2 = C_{6+2-1}^2 = C_7^2 = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = 21$$

Ответ: 21 результат.

1.71. Имеются пирожные 7 различных типов. Пирожные одного и того же типа считаем неразличимыми. Сколько существует различных способов покупки 12 пирожных?

Решение:

Порядок покупки пирожных несущественен. Поэтому любой набор купленных пирожных представляет собой сочетание с повторениями из 7 по 12:

$$\overline{C}_7^{12} = C_{7+12-1}^{7-1} = C_{18}^{6} = \frac{18!}{6!\cdot 12!} = 18\ 564.$$

Ответ: 18 564 способа.

1.72. На почте имеются марки 10-ти различных типов. Покупается 15 марок. Сколько существует различных способов покупки 15-ти марок?

Решение:

$$\overline{C}_{10}^{15} = C_{10+15-1}^{10-1} = C_{24}^{9} = \frac{24!}{9!\cdot 15!}$$

Ответ: $\frac{24!}{9!\cdot 15!}$ способов.

1.73. В оранжерее имеются цветы 10 наименований. Сколькими способами можно составить букет из 20 цветов?

Решение:

$$\overline{C}_{10}^{20} = C_{10+20-1}^{20} = C_{29}^{20} = 10\ 015\ 005$$

Ответ: 10 015 005 букетов.

§2. ЭЛЕМНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Задачей теории вероятностей является изучение законов, управляющих случайными событиями.

Основные понятия теории вероятностей - это испытание (эксперимент) и событие. Под **испытанием** понимают реализацию заданного комплекса условий, в результате которого непременно произойдет какое – либо **событие**.

Пример. Брошена монета - это испытание, появление герба – это событие.

Случайным событием называется событие, связанное с данным испытанием, которое может произойти, а может и не произойти.

Достоверным событием называется событие, которое обязательно происходит в результате каждого проведения данного испытания.

Из определения следует, что достоверному событию соответствует ***все множество*** исходов данного испытания.

Пример. Брошен игральный кубик. Событие A - «при бросании выпало не более шести очков» - есть событие достоверное, так как каждый исход эксперимента (1, 2, 3, 4, 5, 6) удовлетворяет заданному условию.

Невозможным событием называется событие, которое заведомо не произойдет в результате данного испытания.

Из определения следует, что невозможному событию соответствует ***пустое множество*** исходов данного испытания.

Два события называются **противоположными**, если одно событие происходит тогда и только тогда, когда не происходит другое. Обозначаются такие события A и $\bar{A}$.

Это означает, что событию $\bar{A}$ соответствуют те исходы, которые не соответствуют событию A. Объединение исходов, соответствующих A и $\bar{A}$, совпадает с множеством всех исходов испытания.

Пример. Брошен игральный кубик. События A - «выпало четное число очков» и $\bar{A}$ - «выпало нечетное число очков» - есть события противоположные.

Событие A - «выпало четное число очков» и событие B - «выпало 1 или 3 очка» - не противоположные, поскольку объединение их исходов (2, 4, 6 и 1, 3) не дает полного множества всех исходов эксперимента (1, 2, 3, 4, 5, 6).

Два события называются **совместными**, если они могут произойти одновременно при одном исходе эксперимента.

Два события называются **несовместными**, если осуществление одного из них исключает осуществление другого.

События A_1, A_2, ... A_n называется **равновозможными**, если условия испытания обеспечивают одинаковую возможность осуществления каждого из них.

События A_1, A_2, ... A_n образуют **полную группу событий или множество всех возможных исходов** $\Omega = \{\omega\}$, если в результате испытания непременно произойдет одно из этих событий (но два разных результата не могут появиться одновременно в одной и той же реализации эксперимента).

Такие события $\omega = A_i$ называется **элементарными**. Они могут благоприятствовать или не благоприятствовать появлению более сложных событий.

Вероятность случайных событий

Произойдет или не произойдет некоторое случайное событие в результате испытания сказать нельзя, но при многократном повторении испытаний возникают определенные закономерности, которые и изучает теория вероятностей.

Определение: Вероятность случайного события это численная мера объективной возможности появления данного события.

Существует несколько способов численного определения вероятности для различных случайных событий. Рассмотрим модель, которая называется классическое определение вероятности.

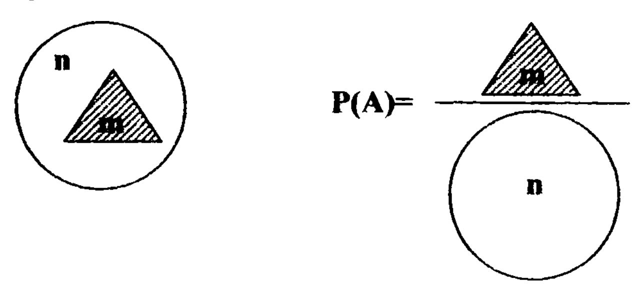
Классическая модель применяется при наличии полной группы несовместных, равновозможных, случайных событий A_1, A_2, ... A_n.

В этом случае вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа **m** элементарных исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу **n** всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу событий.

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Если хотя бы одно из трех вышеперечисленных условий (события A_1, A_2, ... A_n попарно несовместны, равновероятны и образуют полную группу) не выполняется, применять формулу классической вероятности нельзя, результат будет неправильным.

Полезно формуле вероятности события придать наглядную иллюстрацию.



<u>Свойства вероятности</u>:

1) Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей: $0<P(A)<1$.

2) $P(A)=1$ тогда и только тогда, когда A - достоверное событие (т.е. $A=\Omega$).

3) $P(A)=0$ тогда и только тогда, когда A - невозможное событие (т.е. $A=\varnothing$).

4) $P(A)+P(\overline{A})=1$

Для нахождения вероятностей с использованием классического определения может оказаться полезной следующая схема:

1. Осмыслить, в чем состоит испытание (эксперимент).

2. Сформулировать, в чем состоит событие A.

3. Сформулировать, что понимается под элементарным событием в данной задаче. Сформулировав это, надо обязательно проверить три условия для множества всех возможных элементарных исходов Ω:

а) исходы $\omega \in \Omega$ образуют полную группу попарно несовместных событий, т.е. любые два исхода не могут появиться одновременно в одной и той же реализации эксперимента и при любой реализации опыта обязательно появится один из исходов множества Ω;

б) множество Ω конечно;

в) все исходы равновозможны.

4. Подсчитать общее количество исходов.

5. Подсчитать благоприятствующее число исходов.

2.1. Для новогодней лотереи отпечатали 1500 билетов, из которых 120 выигрышных. Какова вероятность того, что купленный билет окажется выигрышным?

Решение:

В таких задачах считается, что лотерейные билеты различимы, например, пронумерованы. Тогда они образуют множество из $n = 1500$ различных по номерам объектов, из которых 120 выигрышных, а остальные – нет. Из этого множества наудачу берется один билет. В этом состоит испытание.

Событие A - «купленный билет оказался выигрышным».

Элементарный исход испытания определяется номером купленного билета, общее число таких элементарных событий будет 1500. Все эти элементарные исходы образуют полную группу.

Покупку любого билета считаем равновозможной, тогда можно применить формулу классической вероятности.

Количество благоприятствующих исходов $m_A = 120$, а общее число равновозможных исходов $n = 1500$.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию A, к числу всех возможных элементарных исходов:

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{120}{1500}=\frac{4}{50}=0{,}08.$$

Ответ: 0,08 или 8%.

2.2. Студент при подготовке к экзамену не успел выучить один из тех 25 билетов, которые будут предложены на экзамене. Какова вероятность того, что студенту достанется на экзамене выученный билет?

Решение:

Общее число билетов $n=25$; выбор каждого билета равновозможен.

Событие A - «студенту достанется на экзамене выученный билет»; количество благоприятствующих исходов $m_A=n-1=24$.

Вероятность события A: $P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{24}{25}$.

Ответ: $\frac{24}{25}$ или 96%.

2.3. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найдите вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение:

Событие A - «набрана нужная цифра».

Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно 10. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу.

Из $n=10$ благоприятствует событию A лишь один исход (нужная цифра лишь одна), поэтому $m_A=1$.

Искомая вероятность: $P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{1}{10}$.

Ответ: 0,1 или 10%.

2.4. Бросаются две монеты. Какова вероятность того, что:

1) выпадут две решки;

2) выпадут орел и решка?

Решение:

Испытание состоит в двухкратном подбрасывании монеты.

Пусть событие A означает, что выпало 2 решки; событие B - выпали орел и решка.

Назовем элементарным событием упорядоченную последовательность двух слов, а именно, элементарные события образуют следующие последовательности:

орел-орел;

орел-решка;

решка-орел;

решка-решка.

Очевидно, что данные четыре исхода образуют полную группу, так как они попарно несовместны и один из них обязательно появится при осуществлении двух бросков монеты. Кроме этого, все четыре исхода равновозможны (в том смысле, что шансы на появление у всех исходов одинаковы), следовательно, применимо классическое определение вероятности.

1) Событию A благоприятствует только один исход *решка-решка*.

$m_A = 1$, тогда искомая вероятность: $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{1}{4}$.

2) Событию B благоприятствуют два исхода *орел-решка* и *решка-орел*. $m_B = 2$, тогда искомая вероятность: $P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Ответ: 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$.

2.5. Брошены две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 4.

Решение:

Событие A - «сумма выпавших очков равна 4».

Под игральной костью понимается кубик, на гранях которого написаны цифры от 1 до 6.

Назовем элементарным событием последовательность двух целых чисел $(i; j)$, где i - число очков, выпавших при первом подбрасывании; j - число очков, выпавших при втором подбрасывании. Поскольку i и j могут принимать значения только от 1 до 6, общее число равновозможных исходов равно $6 \cdot 6 = 36$. Очевидно, что эти события образуют полную группу и равновозможны. Выполнены все условия для применения классического определения вероятности.

Из 36 исходов благоприятствуют событию A только 3:

(1; 3); (3; 1); (2; 2).

Следовательно, искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Ответ: $\frac{1}{12}$.

2.6. В ящике находятся 2 белых, 3 черных, 4 красных шара. Наугад вынимается шар. Какова вероятность того, что этот шар: 1) белый; 2) черный; 3) красный; 4) не белый; 5) не черный; 6) не красный?

Решение:

В ящике содержится $n = 2 + 3 + 4 = 9$ шаров. Будем считать, что все шары пронумерованы. Эти 9 шаров разделяются на 3 группы. Первая группа состоит из 2 белых шаров, вторая группа состоит из 3 черных шаров, третья из 4 красных. Испытание состоит в изъятии наудачу одного шара, элементарный исход испытания определяется номером взятого шара, общее число таких элементарных событий будет 9. Очевидно, что все эти элементарные исходы образуют полную группу и равновозможны.

Находим вероятности событий:

1) A - «вынут белый шар».

Число благоприятствующих событию A исходов: $m_A = 2$.

Тогда $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{2}{9}$.

2) B - «вынут черный шар».

Количество способов, которыми можно вынуть черный шар:

$m_B = 3$. Искомая вероятность: $P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

3) C - «вынут красный шар».

$m_C = 4$; $P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{4}{9}$.

4) $D = \overline{A}$ - «вынут не белый шар».

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{7}{9}$

5) $E = \overline{B}$ - «вынут не черный шар».

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{2}{3}$

6) $F = \overline{C}$ - «вынут не красный шар».

$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = \frac{5}{9}$

Ответ: 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{4}{9}$; 4) $\frac{7}{9}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{5}{9}$.

2.7. В мешке содержится 24 шара. Среди них красных шаров в два раза больше, чем белых, а остальные шары синие. Вероятность того, что вынутый наугад шар окажется белым, равна $\frac{1}{8}$. Найдите вероятность того, что вынутый шар окажется синим.

Решение:

Обозначим количество белых шаров через x, тогда вероятность события A - «вынутый шар оказался белым» равна:

$P(A) = \frac{x}{24} = \frac{1}{8}$.

Если $\frac{x}{24} = \frac{1}{8}$, то $x = 3$.

Значит, в мешке содержится 3 белых шара и $2 \cdot 3 = 6$ красных, тогда количество синих шаров в мешке составляет: $24 - 6 - 3 = 15$.

Искомая вероятность события B - «вынутый шар оказался синим»:

$P(B) = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$.

Ответ: $\frac{5}{8}$.

2.8. В мешке содержатся жетоны с номерами от 1 до 50 включительно. Какова вероятность того, что извлеченный наугад из мешка жетон содержит только одну цифру 3?

Решение:

Общее количество жетонов в мешке $n = 50$, извлечение каждого из них считаем равновозможным.

Рассмотрим событие A - «извлеченный жетон содержит только одну цифру 3». Количество благоприятствующих исходов найдем непосредственным подсчетом чисел с одной цифрой 3:

3, 13, 23, 30, 31, 32, 34-39, 43. Всего 13 чисел.

Таким образом, $m_A = 13$.

Искомая вероятность: $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{13}{50}$.

Ответ: $\frac{13}{50}$.

2.9. В мешке находятся жетоны с номерами от 1 до 15. Из мешка наугад вынимают один жетон. Какова вероятность того, что номер вынутого жетона не делится ни на 2, ни на 3?

Решение:

Количество жетонов $n = 15$; извлечение каждого жетона считаем равновозможным.

Рассмотрим событие A - «номер вынутого жетона не делится ни на 2, ни на 3».

Для определения количества благоприятствующих исходов воспользуемся методом, который называется подсчет «ненужных» вариантов: исключим все 7 четных номеров (2; 4; 6; 8; 10; 12; 14), а также 3 нечетных номера, которые делятся на 3 (т.е. 3; 9; 15); получаем $m_A = n - 7 - 3 = 15 - 10 = 5$.

Искомая вероятность: $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

2.10. Ученик записал в тетради произвольное двузначное число. Какова вероятность того, что сумма цифр этого числа окажется равной 6?

Решение:

Существует $n = 90$ различных двузначных чисел. Если выбор любого из них учеником равновозможен, то можно применить формулу классической вероятности.

Пусть событие A - «сумма цифр записанного двузначного числа равна 6». Количество благоприятствующих событию A исходов найдем прямым перебором: 15, 24, 33, 42, 51, 60.

Таким образом, $m_A = 6$.

Искомая вероятность: $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$.

Ответ: $\frac{1}{15}$.

2.11. В некоторой настольной игре игрок бросает сразу два кубика и делает столько ходов, какова сумма выпавших очков. Какова вероятность того, что игрок сделает менее 10 ходов?

***Решение*:**

В результате подбрасывания кубика может появиться любой из 6 вариантов очков; тогда при бросании двух кубиков число исходов равно $n = 6 \cdot 6 = 36$.

Рассмотрим событие A - «игрок сделает менее 10 ходов». Это значит, что сумма выпавших на кубиках очков меньше 10.

Количество благоприятствующих исходов найдем непосредственным подсчетом числа «ненужных» вариантов:

Сумма	**10**	**11**	**12**
Варианты появления очков	4-6 5-5 6-4	5-6 6-5	6-6
Количество вариантов	3	2	1

Всего $3 + 2 + 1 = 6$ «ненужных» вариантов из 36; следовательно $m_A = 36 - 6 = 30$.

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

Ответ: $\frac{5}{6}$.

2.12. Найдите вероятность того, что случайным образом выбранное двузначное число при делении на 11 дает в остатке 10.

Решение:

Общее число двузначных чисел $n = 90$.

Событие A: «случайным образом выбранное двузначное число при делении на 11 дает в остатке 10».

Количество благоприятствующих исходов m_A равно числу значений k, при которых число $11k + 10$ - двузначное. Это будет при $k = 0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, то есть $m_A = 9$.

Искомая вероятность: $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{9}{90} = 0{,}1$.

Ответ: 0,1.

2.13. Деревянный окрашенный кубик 3×3 распилили на 27 одинаковых кубиков 1×1. Кубики перемешали и выбрали наугад один из них. Найдите вероятность событий:

1) A - окрашены 3 грани;

2) B - окрашенными оказались 2 грани;

3) C - окрашена только одна грань;

4) D - нет ни одной окрашенной грани.

Решение:

Общее количество равновозможных исходов $n = 27$.

1) A - «у выбранного кубика окрашены 3 грани»

Три окрашенные грани могут быть только у тех кубиков, которые изначально располагались в вершинах исходного кубика. Поскольку куб имеет 8 вершин, $m_A = 8$ и $P(A) = \frac{8}{27}$.

2) B - «у выбранного кубика окрашены 2 грани»

Две окрашенные грани могут быть только у тех кубиков, которые изначально располагались по ребрам исходного кубика, но не содержали его вершину, т.е. по одному на каждом ребре исходного кубика. Таких кубиков столько, сколько ребер у куба, т.е. $m_B = 12$.

Следовательно, $P(B) = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$.

3) C - «у выбранного кубика окрашена только одна грань»

Одна окрашенная грань будет только у тех кубиков, которые изначально располагались на гранях исходно кубика, не прилегая к его ребрам. Таких кубиков было по одному на каждой грани исходного кубика, то есть столько, сколько граней у куба.

$m_C = 6$, тогда $P(C) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

4) D - «у выбранного кубика нет ни одной окрашенной грани»

Такой кубик один - в центре исходного кубика.

$m_D = 1$; $P(D) = \frac{1}{27}$.

Ответ: 1) $\frac{8}{27}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) $\frac{2}{9}$; 4) $\frac{1}{27}$.

2.14. Случайным образом выбрали целое число из промежутка $[100; 200)$. Найдите вероятность того, что:

1) оно не оканчивается нулем;

2) среди его цифр есть хотя бы одна цифра больше 2;

3) оно не является квадратом целого числа;

4) сумма его цифр меньше 17.

Решение:

Промежуток $[100; 200)$ содержит $n = 100$ целых чисел, выбор любого из этих чисел равновозможен.

Рассмотрим события:

A - «выбранное число не оканчивается нулем»;

B - «среди цифр выбранного числа есть хотя бы одна цифра больше 2»;

C - «выбранное число не является квадратом целого числа»;

D - «сумма цифр выбранного числа меньше 17».

Количество благоприятствующих исходов для каждого из этих событий подсчитаем, исключая «ненужные» варианты.

1) Количество чисел, оканчивающихся нулем, равно 10 (100; 110; 120; 130 и т.д.), поэтому $m_A = 100 - 10 = 90$. Тогда $P(A) = \frac{90}{100} = 0,9$.

2) Найдем количество чисел, составленных из цифр, каждое из которых не больше 2. У таких чисел в разряде единиц и десятков могут стоять только цифры 0; 1 или 2 (в разряде сотен всегда стоит 1). Тогда всего таких чисел: $n = 3 \cdot 3 = 9$.

Если количество чисел, составленных только из цифр не превышающих 2, равно 9, то $m_B = 100 - 9 = 91$. Следовательно, $P(B) = \frac{91}{100} = 0,91$.

3) Количество чисел, являющихся квадратом целого числа, подсчитаем непосредственно: 100; 121; 144; 169; 196 - всего 5 чисел, поэтому $m_C = 100 - 5 = 95$. Тогда $P(C) = \frac{95}{100} = 0,95$.

4) Количество чисел из интервала, сумма цифр которых больше или равна 17, находим, составляя двузначные числа, сумма цифр которых больше или равна 16 (поскольку первая цифра у нас всегда 1), то есть либо 16, либо 17, либо 18 (других вариантов быть не может).

Таких чисел 6, а именно: 179; 197; 188; 189; 198; 199.

Следовательно, $m_D = 100 - 6 = 94$ и $P(D) = \frac{94}{100} = 0,94$.

Ответ: 1) 0,9; 2) 0,91; 3) 0,95; 4) 0,94.

Комбинаторные методы решение вероятностных задач

2.15. Взяли четыре карточки. На первой написали букву *О*, на второй *Т* на третьей *С*, на четвертой *П*. Карточки перевернули и перемешали. Затем открыли наугад одну карточку за другой и положили рядом. Какова вероятность того, что в результате получится слово «*СТОП*» или слово «*ПОСТ*»?

Решение:

Элементарным событием объявим любую перестановку 4-х букв. Все эти элементарные события образуют полную группу и равновозможны. Выполнены все предпосылки применимости классического определения вероятности.

Общее число исходов $n = P_4 = 4! = 24$.

Событие A - «получилось слово «*СТОП*» или «*ПОСТ*»; количество благоприятствующих исходов по правилу суммы несовместных исходов: $m_A = 1 + 1 = 2$ («стоп» + «пост»).

Вероятность $P(A) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.

Ответ: $\frac{1}{12}$.

2.16. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение:

Событие A - «набраны две нужные цифры».

Всего можно набрать столько различных цифр, сколько может быть составлено размещений из десяти цифр по две, т. е. $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$. Таким образом, общее число возможных элементарных исходов равно 90. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию A лишь один исход. Искомая вероятность равна отношению:

$$P(A) = \frac{1}{90}.$$

Ответ: $\frac{1}{90}$.

2.16. Чемодан можно открыть, если правильно набрать шифр 22 075 (при наборе шифра цифра каждого разряда может быть любой от 0 до 9). Какова вероятность того, что человек, набрав произвольно номер из пяти цифр, сможет открыть чемодан?

Решение:

Элементарными исходами произвольного набора являются все возможные размещения из 10 цифр по 5 с повторениями. Поскольку человек набирает номер из пяти цифр наудачу, все элементарные исходы равновозможны.

Количество элементарных исходов по формуле: $n = \overline{A}_{10}^5 = 10^5$.

Благоприятствует событию A - «чемодан открылся» только один исход: 22 075.

Таким образом, $m_A = 1$ и $P(A) = \frac{1}{10^5} = 0,00001$.

Ответ: 0,00001.

2.17. На карточках написали цифры 1, 2, 3, после чего карточки перевернули и перемешали. Затем последовательно открыли карточки и положили в ряд. Какова вероятность того, что получится трехзначное число, большее 300?

Решение:

Элементарные исходы - все возможные перестановки из трех цифр; общее число таких исходов $n = P_3 = 3! = 6$. Все элементарные исходы считаем равновозможными.

Событие A - «получилось трехзначное число, большее 300».

Благоприятствующими исходами являются перестановки, в которых первая цифра 3, таких перестановок только две: 312 и 321. Следовательно, $m_A = 2$ и $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

2.18. На карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4. Карточки перевернули и перемешали. Затем открыли наугад последовательно одну за другой три карточки, расположив их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что в результате получилось:

1) число 123;

2) число 312 или 321;

3) число, первая цифра которого 2?

Решение:

Элементарными исходами опыта являются все возможные размещения четырех карточек на трех местах (порядок расположения важен). Общее число исходов $n = A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Рассмотрим события и их вероятности:

1) Событие A - «из трех карточек образовано число 123».

$m_A = 1$, следовательно $P(A) = \frac{1}{24}$.

2) Событие B - «из трех карточек образовано число 312 и 321».

$m_B = 2$, следовательно $P(B) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.

3) Событие C - «из трех карточек образовано число, первая цифра которого 2».

Если первая цифра фиксирована, то на оставшихся двух местах можно разместить любую из оставшихся трех цифр с учетом порядка, то есть $m_C = A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

$$P(C) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

Ответ: 1) $\frac{1}{24}$; 2) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{1}{4}$.

2.19. В урне 4 белых и 7 черных шаров. Событие A - выемка 2 белых шаров. Требуется найти $P(A)$.

Решение:

Будем считать, что все $4 + 7 = 11$ шаров пронумерованы. Эти 11 шаров разделяются на 2 группы. Первая группа состоит из 4-х белых шаров, вторая группа состоит из 7-ми черных. Эксперимент состоит в выборе наудачу 2 шаров из 11. Выбранная пара образует 2-элементное подмножество множества из 11-ти шаров (их порядок значения не имеет), т.е. является сочетанием из 11 элементов по 2.

Обозначим через A событие – «оба шара – белые».

Элементарным событием в данном испытании объявим любое сочетание из 11 элементов по 2. Тогда число таких элементарных событий равно:

$$n = C_{11}^2 = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55.$$

Ясно, что все такие элементарные исходы образуют полную группу и равновозможны.

Событию A благоприятствуют только те сочетания, которые являются 2-элементными подмножествами 4-элементного множества белых шаров, поэтому $m_A = C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{6}{55}$$

Ответ: $\frac{6}{55}$.

2.20. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найдите вероятность того, что среди шести взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение:

Будем считать, что все детали пронумерованы, т.е. они образуют множество из $n = 10$ различных по номерам объектов, из которых 7 стандартных, а остальные – бракованные. Эксперимент состоит в том, что из этой партии наудачу берутся 6 деталей.

Событие A - среди шести взятых деталей 4 стандартных.

Элементарный исход эксперимента определяется номерами шести взятых деталей, причем порядок указания номеров не имеет значения. Следовательно, элементарное событие совпадает с сочетанием из 10 элементов по 6. Общее число таких элементарных событий равно числу различных сочетаний из 10 элементов по 6 и выражается формулой:

$$C_{10}^6 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{24} = 210.$$

Все эти элементарные исходы образуют полную группу и равновозможны, так как 6 деталей берутся наудачу и одна шестерка деталей имеет такие же шансы быть взятой, что и любая другая. Следовательно, можно использовать классическое определение вероятности.

Событию A благоприятствуют только те элементарные исходы (шестерки деталей), которые содержат 4 стандартные и 2 бракованные детали. Чтобы получить такое множество из 6-ти деталей, надо совершить последовательно 2 действия: 1-е действие – взять 4 стандартные детали из общего числа 7-ми стандартных деталей (это действие можно совершить C_7^4 различными способами), 2-е действие – взять 2 бракованных изделия из общего числа 3-х бракованных деталей (это действие можно совершить

C_3^2 различными способами). Тогда по правилу умножения оба действия можно совершить $C_7^4 \cdot C_3^2$ различными способами.

Число благоприятствующих исходов равно:

$$C_7^4 \cdot C_3^2 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} \cdot 3 = 35 \cdot 3 = 105.$$

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{105}{210} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $0{,}5$.

2.21. В пачке находятся одинаковые по размеру 7 тетрадей в линейку и 5 в клетку. Из пачки наугад берут 3 тетради. Какова вероятность того, что все 3 тетради окажутся в клетку?

Решение:

Элементарные исходы - все возможные наборы по 3 тетради из 12, находящихся в пачке, без учета порядка их расположения в наборе (сочетания из 12 элементов по 3).

Общее число возможных исходов $n = C_{12}^3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{2 \cdot 3} = 220$.

Событие A - «все три тетради в наборе - в клетку».

$m_A = C_5^3 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Тогда $P(A) = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$.

Ответ: $\frac{1}{22}$.

2.22. На полке стоят 12 книг, из которых 4 – это учебники. С полки наугад снимают 6 книг. Какова вероятность того, что три из них окажутся учебниками?

Решение:

Элементарные исходы - все возможные наборы из 6 книг без учета порядка; общее число исходов:

$$n = C_{12}^6 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 924$$

Событие A - «из 6 снятых книг 3 оказались учебниками», то есть с полки взяли 3 учебника из 4-х имеющихся и 3 книги из 8 книг – не учебников.

Три учебника из четырех можно выбрать C_4^3 способами, три обычные книги из восьми можно выбрать C_8^3 способами, значит, по теореме умножения событию A благоприятствует $C_4^3 \cdot C_8^3$ исходов.

$$m_A = C_4^3 \cdot C_8^3 = \frac{4}{1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 224$$

Искомая вероятность $P(A) = \frac{224}{924} = \frac{8}{33}$.

Ответ: $\frac{8}{33}$.

2.23. Карточка «Спортлото» содержит 49 чисел. В итоге тиража выигрывают какие-то 6 чисел. Какова (в процентах, приближенно) вероятность того, что на вашей карточке, где отмечены 6 чисел, верно угаданы 3 числа?

Решение:

Исходами являются все возможные наборы по 6 чисел из 49 чисел карточки; порядок расположения чисел в карточке значения не имеет.

Общее число исходов $n = C_{49}^6 = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,983\,816$.

Рассмотрим событие A - «в карточке угаданы 3 числа».

$$m_A = C_6^3 \cdot C_{43}^3 = 246\,820$$

Искомая вероятность $P(A) = \frac{246\,820}{13\,983\,816} = 0{,}0177$ или 1,77%.

Ответ: 1,77%.

2.24. В вазе 11 гвоздик, из которых 4 красные. В темноте наугад вынимают три гвоздики. Какова вероятность того, что хотя бы одна из них будет красной?

Решение:

Исходы - все возможные наборы по 3 гвоздики из 11, находящихся в вазе; порядок расположения гвоздик в наборе значения не имеет.

Общее число исходов $n = C_{11}^3 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{6} = 165$.

Рассмотрим событие A - «в вынутом наборе хотя бы одна гвоздика будет красная». Количество благоприятствующих исходов найдем, исключая «ненужные» варианты. Для этого из общего числа исходов исключим количество комбинаций, где нет ни одной красной гвоздики, таких комбинаций будет C_7^3.

$$m_A = n - C_7^3 = 165 - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 130$$

Искомая вероятность $P(A) = \frac{130}{165} = \frac{26}{33}$.

Ответ: $\frac{26}{33}$.

2.25. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что:

1) хотя бы на одной кости появится 3 очка;

2) хотя бы на одной кости появится четное число очков?

Решение:

Общее число исходов $n = 6 \cdot 6 = 36$; все исходы считаем равновозможными.

Рассмотрим события: A - «хотя бы на одной кости появятся 3 очка»; B - «хотя бы на одной кости появится четное число очков».

Количество благоприятствующих вариантов найдем так называемым исключением «ненужных» вариантов:

1) $\overline{A}$ - «на первой костяшке выпало не 3 и на второй выпало не 3».

$m_{\overline{A}} = 5 \cdot 5 = 25$, тогда $m_A = 36 - 25 = 11$.

Искомая вероятность: $P(A) = \frac{11}{36}$.

2) $\overline{B}$ - «на первой костяшке выпало нечетное число очков и на второй выпало нечетное число очков».

$m_{\overline{B}} = 3 \cdot 3 = 9$, тогда $m_B = 36 - 9 = 27$.

Искомая вероятность: $P(A)=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$.

Ответ: 1) $\frac{11}{36}$; 2) $\frac{3}{4}$.

2.26. В коробке «Ассорти» - 20 неразличимых по виду конфет, из которых 12 с шоколадной начинкой и 8 с фруктовой начинкой. Тане разрешили взять две конфеты. Какова вероятность того, что:

1) обе конфеты окажутся с любимой Таниной начинкой - шоколадной;

2) обе конфеты - с фруктовой начинкой;

3) конфеты - с разными начинками?

Решение:

Исходы - все возможные пары конфет, выбранные из коробки без учета порядка выбора; общее число исходов:

$$n=C_{20}^{2}=\frac{20\cdot 19}{2}=190.$$

Рассмотрим события:

1) A - «обе выбранные конфеты с шоколадной начинкой».

Выбрать две конфеты с шоколадной начинкой из 12 можно количеством способов, соответствующим числу сочетаний из 12 элементов по 2:

$$m_A=C_{12}^{2}=\frac{12\cdot 11}{2}=66. \text{ Тогда } P(A)=\frac{66}{190}=\frac{33}{95}.$$

2) B - «обе выбранные конфеты - с фруктовой начинкой».

Выбрать две конфеты с фруктовой начинкой из 8 можно количеством способов, соответствующим числу сочетаний из 8 элементов по 2:

$$m_B=C_{8}^{2}=\frac{8\cdot 7}{2}=28. \text{ Тогда } P(B)=\frac{28}{190}=\frac{14}{95}.$$

3) C - «выбранные конфеты - с разными начинками».

Число способов для выбора одной конфеты с шоколадной начинкой и одной конфеты с фруктовой начинкой по правилу произведения равно:

$m_C = C_{12}^1 \cdot C_8^1 = 12 \cdot 8 = 96$. Тогда $P(C) = \dfrac{96}{190} = \dfrac{48}{95}$.

Ответ: 1) $\dfrac{33}{95}$; 2) $\dfrac{14}{95}$; 3) $\dfrac{48}{95}$.

2.27. Вы находитесь в круглом зале с 10 дверьми, из которых какие-то 4 заперты. Вы случайным образом выбираете две двери. Найдите вероятность того, что:

1) вы не сможете выйти из зала;

2) вы можете выйти из зала, но вернуться через другую дверь уже не сможете;

3) вы сможете выйти через одну, вернуться в зал через другую;

4) хотя бы через одну дверь вы сможете выйти из зала.

Решение:

Исходы - все возможные пары дверей из 10 имеющихся без учета порядка выбора.

Общее число исходов $n = C_{10}^2 = \dfrac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

Найдем вероятности событий:

1) A - «вы не сможете выйти из зала», то есть выбраны 2 двери из 4-х запертых.

$m_A = C_4^2 = 6$

$P(A) = \dfrac{6}{45} = \dfrac{2}{15}$

2) B - «вы сможете выйти, но не сможете вернуться через другую дверь», это значит, что одна дверь открыта, а другая – заперта.

$m_B = C_6^1 \cdot C_4^1 = 6 \cdot 4 = 24$

$P(B) = \dfrac{24}{45} = \dfrac{8}{15}$

3) C - «вы сможете выйти через одну, а вернуться через другую дверь», это значит, что обе двери открыты.

$$m_C = C_6^2 = 15$$

$$P(C) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

4) D - «хотя бы через одну дверь вы сможете выйти из зала», это значит, что открыта одна дверь или обе.

$m_D = C_6^1 \cdot C_4^1 + C_6^2 = 6 \cdot 4 + 15 = 39$ (выбираем одну открытую и одну закрытую дверь или две открытых двери)

$$P(D) = \frac{39}{45} = \frac{13}{15}$$

Ответ: 1) $\frac{2}{15}$; 2) $\frac{8}{15}$; 2) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{13}{15}$.

2.28. На девяти одинаковых карточках написано по одной цифре от 1 до 9 (на разных карточках разные цифры). Наудачу берутся 5 карточек и располагаются в строку. Найдите вероятность того, что:

1) получится четное число;

2) полученное число делится на 5;

3) полученное число делится на 25.

Решение:

Карточки образуют множество из $k = 9$ различимых элементов (на карточках разные цифры). Эксперимент состоит во взятии наудачу пяти карточек из девяти и расположении их наугад в строку. В результате получается пятизначное число.

Пусть событие A означает, что полученное число четное;

событие B означает, что полученное число делится на 5;

событие C означает, что полученное число делится на 25.

В первом испытании под элементарным событием понимаем любое пятизначное число, которое можно получить. Поскольку пятизначное число определяется набором различных цифр, а также их порядком следования, то элементарное событие совпадает с размещением из 9 элементов по 5.

Поэтому число элементарных событий: $n = A_9^5$.

Очевидно, что все такие элементарные события образуют полную группу и равновозможны. Равновозможность обеспечивается взятием наудачу пяти карточек и расположением их в произвольном порядке.

1) Найдем количество пятизначных чисел, составленных из заданного набора чисел и удовлетворяющих первому условию.

Пятизначное число является четным тогда и только тогда, когда последняя цифра четна, т.е. равна либо 2, либо 4, либо 6, либо 8. Нуль не берем, так как он отсутствует на девяти карточках. Таким образом, четное пятизначное число с различным написанием цифр можно получить, совершив последовательно два действия.

Первое действие – выбор четной цифры для написания последней цифры пятизначного числа. Это действие можно совершить четырьмя различными способами.

Второе действие состоит в выборе наудачу четырех цифр из оставшихся восьми свободных цифр и расположении их наугад на первых четырех позициях написания пятизначного числа. Второе действие можно выполнить A_8^4 различными способами.

По правилу умножения $m_A = 4 \cdot A_8^4 = 4 \cdot 1\,680 = 6\,720$ и, следовательно,

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{4 \cdot A_8^4}{A_9^5} = \frac{4 \cdot 8!}{4!} : \frac{9!}{4!} = \frac{4 \cdot 8!}{9!} = \frac{4}{9}.$$

2) Событию B благоприятствуют те элементарные события, у которых на последнем месте стоит цифра 5. Значит, количество таких пятизначных чисел совпадает с числом размещений четырех элементов из 8-и оставшихся карточек, не содержащих цифру 5:

$m_B = A_8^4$.

Поэтому $P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{A_8^4}{A_9^5} = \frac{8!}{4!} : \frac{9!}{4!} = \frac{8!}{9!} = \frac{1}{9}$.

3) Событию C благоприятствуют лишь те пятизначные числа, последние две цифры которых образуют двузначное число, которое делится на 25. В нашем случае возможные варианты последние две

цифры образуют либо число 25, либо число 75. Таким образом, последние две цифры пятизначного числа могут быть записаны двумя разными способами. Тогда первые три цифры пятизначного числа могут быть написаны A_7^3 различными способами. Поэтому $m_C = 2 \cdot A_7^3$ и, следовательно, $P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{2 \cdot A_7^3}{A_9^5} = \frac{2 \cdot 7!}{4!} : \frac{9!}{4!} = \frac{2 \cdot 7!}{9!} = \frac{2}{9 \cdot 8} = \frac{1}{36}$.

Ответ: 1) $\frac{4}{9}$; 2) $\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{36}$.

Свойства вероятностей. Теоремы о вероятностях

Сумма событий A и B есть новое случайное событие $A+B$, которое происходит, если происходит *либо событие* A *либо событие* B, *либо* A и B одновременно.

Событию $A+B$ соответствует объединение множеств исходов, соответствующих событиям A и B.

Пример. Бросают игральную кость. Полная группа событий включает 6 элементарных событий A_1, A_2, ... A_6 - на верхней грани выпало 1, 2, . . . 6 очков соответственно. Пусть событие A – появление четного числа очков. Событию A благоприятствуют 3 элементарных события A_2, A_4, A_6, т.е. $A = A_2 + A_4 + A_6$.

Теорема сложения. Вероятность суммы двух **несовместных** случайных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Произведение событий A и B есть новое случайное событие $A \cdot B$, которое происходит только тогда, когда происходит одновременное появление *и события* A *и события* B.

Событию $A \cdot B$ соответствует пересечение множеств исходов, соответствующих событиям A и B.

События называются ***независимыми***, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Теорема умножения. Вероятность произведения двух **независимых** случайных событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

2.29. Вероятность появления бракованной детали в партии равна 0,015. Найдите вероятность того, что из этой партии будет изъята небракованная деталь.

Решение:

Рассмотрим события:

A - «деталь, изъятая из партии, бракованная»;

B - «деталь, изъятая из партии, доброкачественная».

Очевидно, что эти два события противоположные, то есть $B = \overline{A}$. По условию задачи $P(A) = 0{,}015$, по свойству вероятности противоположного события:

$$P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}015 = 0{,}985.$$

Ответ: 0,985.

2.30. Для украшения елки принесли коробку, в которой находится 10 красных, 7 зеленых, 5 синих и 8 золотых шаров. Из коробки наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что он окажется: красным или золотым?

Решение:

Рассмотрим события:

A - «вынутый шар оказался красным»;

B - «вынутый шар оказался золотым»;

C - «вынутый шар оказался красным или золотым».

Событие C есть сумма двух несовместных событий A и B, по теореме сложения:

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{10}{30} + \frac{8}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: $\frac{3}{5}$.

2.31. Многократные испытания показали, что для некоторого стрелка вероятность выбить при стрельбе 10 очков равна 0,1, а вероятность выбить 9 очков равна 0,3. Чему равна для этого стрелка вероятность выбить не менее 9 очков?

Решение:

Рассмотрим события:

A_1 - «стрелок при выстреле выбил 10 очков»;

A_2 - «стрелок при выстреле выбил 9 очков»;

A - «стрелок при выстреле выбил не менее 9 очков».

Очевидно, что A происходит, если происходит либо A_1, либо A_2, т. е. A есть сумма этих двух событий. События A_1 и A_2 не могут произойти одновременно, то есть они несовместны.

По условию задачи: $P(A_1)=0,1$; $P(A_2)=0,3$.

По теореме сложения вероятностей:

$$P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)=0,1+0,3=0,4.$$

Ответ: 0,4.

2.32. В одной партии электролампочек 3 % бракованных, а в другой 4 % бракованных. Наугад берут по одной лампочке из каждой партии. Какова вероятность того, что обе лампочки окажутся бракованными?

Решение:

Рассмотрим события:

A - «из первой партии взята бракованная лампочка»;

B - «из второй партии взята бракованная лампочка»;

C - «обе взятые лампочки оказались бракованными».

Вероятности этих событий по условию:

$P(A)=0,03$; $P(B)=0,04$.

Событие C состоит в одновременном наступлении событий A и B, т. е. является их произведением.

События A и B независимы, поэтому по теоремс умножения вероятностей:

$$P(C)=P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=0,03\cdot 0,04=0,0012.$$

Ответ: 0,0012.

2.33. Вероятность остановки за смену одного станка, работающего в цехе, равна 0,15, а другого - 0,16. Какова вероятность того, что оба станка за смену не остановятся?

Решение:

Рассмотрим события:

A_1 - «первый станок за смену не остановится»;

A_2 - «второй станок за смену не остановится»;

A - «оба станка за смену не остановятся».

События A_1 и A_2 независимые, событие A есть произведение событий A_1 и A_2; по теореме умножения:

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2).$$

По условию задачи даны $P(\overline{A_1})=0,15$ и $P(\overline{A_2})=0,16$; по свойству вероятности противоположного события:

$$P(A_1)=1-P(\overline{A_1})=1-0,15=0,85$$

$$P(A_2)=1-P(\overline{A_2})=1-0,16=0,84$$

Искомая вероятность $P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)=0,85\cdot 0,84=0,714$.

Ответ: 0,714.

2.34. На одной полке стоят 12 книг, две из которых - сборники стихов, а на другой - 15 книг, три из которых – сборники стихов. Наугад берут с каждой полки по одной книге. Какова вероятность того, что обе книги окажутся сборниками стихов?

Решение:

Рассмотрим события:

A - «книга, взятая с первой полки - сборник стихов»;

B - «книга, взятая со второй полки - сборник стихов»;

C - «обе взятые книги - сборники стихов».

Вероятности этих событий:

$$P(A)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6};\quad P(B)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}.$$

Событие C состоит в одновременном наступлении событий A и B, то есть является их произведением. События A и B независимы, поэтому по теореме умножения вероятностей

$$P(C)=P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$$

Ответ: $\frac{1}{30}$.

2.35. Монету бросают три раза подряд. Какова вероятность того, что каждый раз выпадет решка?

Решение:

Рассмотрим события:

A_i - «при i -ом бросании монеты выпала решка» $(i=1,2,3)$;

A - «три раза подряд выпала решка».

Событие A заключается в одновременном наступлении всех трех событий A_1, A_2, A_3, то есть является произведением этих событий. Бросания монеты предполагаются независимыми, поэтому по теореме умножения вероятностей и формуле классической вероятности:

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

2.36. Сколько надо бросить игральных костей, чтобы с вероятностью, меньшей $\frac{125}{216}$, можно было ожидать, что ни на одной из выпавших граней не появится 6 очков?

Решение:

Рассмотрим события:

A_i - «на выпавшей грани i -ой кости $(i = 1, 2, ..., n)$ не появится 6»;

A - «ни на одной из выпавших граней не появится 6 очков».

Вероятность того, что на любой выпавшей грани появится число очков, не равное шести, равна $P(A_i) = \frac{5}{6}$.

Событие A заключается в одновременном наступлении всех событий A_1, A_2, ... A_n, то есть $A = A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n$. События A_i независимы в совокупности, поэтому применима теорема умножения:

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

По условию задачи $\left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{125}{216}$.

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

С учетом того, что $\frac{5}{6} < 1$, получаем $n > 3$.

Ответ: $n > 3$.

Список использованной литературы

1. Александров Б.И. и др. Пособие по математике для поступающих в вузы. Москва, издательство “МГУ”, 1972 г.

2. Бородуля И.Т. Тригонометрические уравнения и неравенства. Москва, издательство “Просвещение”, 1989 г.

3. Бородуля И.Т. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства. Москва, издательство “Просвещение”, 1968 г.

4. Быков А.А. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. Москва, издательство ГУ ВШЭ, 2008 г.

5. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра. Москва, издательство “Наука”, 1988 г.

6. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Начала анализа. Москва, издательство “Наука”, 1990 г.

7. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Москва, издательство “Наука”, 1987 г.

8. Веременюк В.В., Кожушко В.В. Тренажер по математике для подготовки к централизованному тестированию и экзамену. Минск, издательство: Тетра-Системс, 2008 г.

9. Галицкий М.Л. и др. Сборник задач по алгебре 8-9 класс Москва, Просвещение, 2011 г.

10. Гилев В.Г. Исследование рациональных функций на монотонность и экстремумы. Москва, издательство Илекса, 2011 г.

11. Говоров В.Н., Дыбов П.Т. и др. Сборник конкурсных задач по математике. Москва, издательство “Наука”, 1986 г.

12. Дорофеев Г.В. и др. Пособие по математике для поступающих в вузы. Москва, издательство “Наука”, 1972 г.

13. Зив Б.Г. Дидактические материалы для 8, 9, 10, 11 классов. *Санкт-Петербург, 2010 г.*

14. Зорин В.В. Пособие по математике для поступающих в вузы. Москва, издательство “Наука”, 1973 г.

15. Иванов А.П. Тесты и контрольные работы по математике. Москва, издательство МФТИ, 2006 г.

16. Ивлев Б.М., Земляков А.Н. и др. Сборник задач по алгебре и началам анализа. Москва, издательство “Просвещение”, 1978 г.

17. Колесникова С.И. Математика. Решение сложных задач. Москва, издательство “Айрис Пресс”, 2006 г.

18. Кононов А.Я. Сборник задач по алгебре и математическому анализу. Москва, издательство “Генжер”, 2001 г.

19. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. Москва, издательство “Просвещение”, 1990 г.

20. Кравцев С.В., Макаров Ю.Н. и др. Методы решения задач по алгебре. От простых до самых сложных. Москва, издательство “Экзамен”, 2001 г.

21. Лейбсон К.Л. Сборник практических заданий по математике. Москва, издательство МЦНМО, 2009 г.

22. Лисичкин В. Т. Производная и ее приложения в задачах. Москва, издательство Илекса, 2010 г.

23. Мальцев Д.А. Алгебра. Тематические тесты и упражнения. Москва, издательство “Афина”, 2010 г.

24. Мальцев Д.А. и др. Математика для ЕГЭ. Москва, издательство “Афина”, 2011 г.

25. Мирошникова М.М. и др. Контроль знаний по математике с применением ЭВМ. Москва, издательство “Высшая школа”, 1990 г.

26. Рязоновский А.Р. Математика: Решение задач повышенной сложности. Москва, издательство: Интеллект-Центр, 2007 г.

27. Самсонов П.И. Алгебра и начала анализа. 10-11 классы. Москва, издательство Илекса, 2011 г.

28. Семенко Е.А. Тематический сборник заданий для подготовки к ЕГЭ по математике. . Москва, издательство “Экзамен”, 2012 г.

29. Соболь Б.В., Виноградова И.Ю. и др. Пособие для подготовки к единому государственному экзамену и централизованному тестированию по математике. Ростов-на-Дону, издательство “Феникс”, 2004 г.

30. Титаренко А.М. 6000 задач по математике от простейших до олимпиад. Ростов-на-Дону, издательство “Феникс”, 2011 г.

31. Ткачук В. В. Математика - абитуриенту. (14-е изд., исправленное и дополненное) Москва, издательство МЦНМО, 2007 г.

32. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. Москва, издательство “Наука”, 1983 г.

33. Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. Математика. Справочник для старшеклассников и поступающих в вузы. Москва, издательство “АСТ-Пресс Школа”, 2004 г.

34. Шабунин М.И. и др. Алгебра. Дидактические материалы для 10, 11 классов. Москва, издательство “Просвещение”, 2010 г.

35. Шабунин М.И. Математика для поступающих в вузы. Москва, издательство “БИНОМ. Лаборатория знаний”, 2011 г.

36. Шабунин М.И. и др. Математика. Задачник. Профильный уровень. Москва, издательство “БИНОМ. Лаборатория знаний”, 2011 г.

37. Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. Факультативный курс по математике. Решение задач. Москва, издательство “Просвещение”, 1991 г.

38. Шахмейстер А.Х. Пособие для школьников и абитуриентов под редакцией Зива Б.Г. Москва, издательство МЦНМО.

39. Шепелева Ю.В. Алгебра и начала математического анализа. Тематические тесты. 10, 11 классы. Москва, издательство “Просвещение”, 2012 г.

40. Яремчук Ф.П., Рудченко П.А. Алгебра и элементарные функции. Киев, издательство “Наукова думка”, 1987 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ИРИНА ПАВЛОВНА РУСТЮМОВА
СВЕТЛАНА ТЮЛЮГОНОВНА РУСТЮМОВА

Пособие для подготовки к единому национальному тестированию (ЕНТ) по математике

(Учебно-методическое пособие)

Издание первое

По вопросам **оптового** приобретения книг можно обращаться по телефонам:

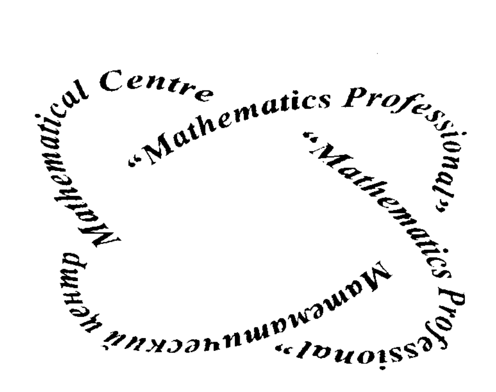
+7 (727) 375 - 56 - 12

+7 - 777 - 496 - 25 - 14

+7 - 707 - 315 - 56 - 05

+7 (727) 248 - 24 - 23

+7 - 777 - 319 - 25 - 61


Mathematical Centre
«Mathematics Professional»
Математический центр
«Mathematics Professional»

Подписано в печать 10.09.2013. Печать офсет.
Формат изд. 60х84/16
Объем 38,5 усл. печ. л. Тираж 1000 экз.

Отпечатано в типографии «ИП Волкова»
Райымбека 212/1, оф. 319
Тел.: 8(727)330-03-12, 8(727)330-03-13